Andrzej B. CHOJNACKI[1]

BADANIA OPERACYJNE PRZY NIEPEŁNEJ INFORMACJI

Streszczenie

W artykule przedstawiono podstawowe problemy związane z niekompletnością informacji w procesach podejmowania decyzji bazujących na metodologii badań operacyjnych. Przedstawiono etapy postępowania charakterystyczne dla badań operacyjnych. Omówiono zasady konstruowania modelu matematycznego oraz elementy i konstrukcję zadania optymalizacyjnego. Wymieniono najważniejsze przyczyny braku informacji analizując sytuację podmiotu decyzyjnego oraz analityka. Scharakteryzowano sytuacje growe, losowe, rozmyte, tzw. nieokreślone oraz opisywane zbiorami przybliżonymi. Przedstawiono związane z tym różne techniki definiowania funkcji oceny osiągnięcia celi.

This paper concerns basic problems connected with imperfect knowledge in decision making processes based on the operation research methodology. The stages of proceedings characteristic for operation research are shown. The rules of construction of mathematical models and optimization problems are presented. The main reasons of imperfect knowledge are discussed after analysis of situation of the decision object and the analytic. The game, probabilistic, fuzzy, indefinite and fuzzy sets defined situations are described. Various techniques of defining the achieve goal assessment function are presented.

1. ISTOTA BADAŃ OPERACYJNYCH

Gdy w czasie II wojny światowej powstawały badania operacyjne, to głównym obszarem ich zastosowań był system obrony przeciwlotniczej Wielkiej Brytanii wzbogacany niedawno wynalezionymi radarami. Członkowie pierwszej grupy badaczy operacyjnych – „cyrku Blacketta[2]" - opracowując sposoby wykorzystania ra-

[1] Autor jest profesorem Warszawskiej Wyższej Szkole Informatyki oraz profesorem nadzwyczajnym Wydziału Cybernetyki Wojskowej Akademii Technicznej

[2] Patrick M. S. Blackett (1897-1974) – fizyk angielski, odkrywca pozytonu, noblista z roku 1948, kierownik pierwszego zespołu badań operacyjnych.

darów w systemie zwalczającym maszyny Luftwaffe zakładali, że samoloty wroga działały będą zgodnie z ustalonymi zasadami, które Brytyjczycy znali prowadząc obserwację taktyki nieprzyjaciela. Przyjmowali więc założenie o znajomości organizacji nalotów, czyli rozpatrywane przez nich „operacje" były dostosowane do znanych, z założenia, wielkości. Tym samym badacze rozpatrywali modele, w których nie był uwzględniany problem ewentualnego braku lub niekompletności informacji o modelowanym obiekcie.

Ale najpierw kilka słów o istocie badań operacyjnych. Stanowią one bardzo specyficzny obszar nauki. Większość dyscyplin naukowych charakteryzuje się tym, że dotyczą określonego obszaru badawczego. Zoologia zajmuje się zwierzętami, a fizyka – materią. Natomiast badania operacyjne (BO) charakteryzują się specyficzną, wieloetapową metodą badawczą, która stosowana może być w dowolnym obszarze działalności człowieka, wszędzie tam, gdzie w płaszczyźnie zainteresowań jest oddziaływanie człowieka na otaczającą rzeczywistość, czyli wykonywanie różnorodnych, świadomych „operacji". W BO można wyróżnić następujące etapy:

1. Określenie obiektu zainteresowań i problemu związanego z tym obiektem. Wynikiem tego etapu jest wyodrębnienie z otoczenia pewnego fragmentu (czasami nazywanego układem względnie odosobnionym lub obiektem rzeczywistym), który będzie podlegał dalszym badaniom prowadzonym z punktu widzenia ustalonego problemu. Problem ten z reguły ma charakter pytania: „Jakie działanie należy podjąć, aby uzyskać zamierzony efekt, czy też osiągnąć ustalony cel?".
2. Ustalenie potrzeby i możliwości modelowania formalnego wyodrębnionego obiektu zainteresowań oraz, w przypadku odpowiedzi pozytywnej, konkretyzacja celu tego modelowania. Potrzeba modelowania wynika najczęściej z tego, że jest to metoda stosunkowo mało kosztowna. Ponadto powszechnie przyjmuje się, że modelowanie formalne, w tym matematyczne, jest obecnie najważniejszym i najskuteczniejszym narzędziem badawczym prawie we wszystkich dziedzinach nauki. Tym niemniej często nie ma możliwości skonstruowania odpowiedniego modelu czy to ze względu na złożoność problemu, czy na brak czasu, czy też z innych przyczyn. Uściślenie na tym etapie celu modelowania formalnego wiąże się z tym, że opracowując odpowiednią propozycję oddziaływania na rzeczywistość, czyli przeprowadzenia „operacji", należy udzielić odpowiedzi na pytanie, czy w wyniku tego oddziaływania cel zostanie osiągnięty, czy też nie. Wymagane jest więc takie określenie celu, aby miał on atrybut mierzalności. Cel nie może być w takim razie hasłem typu „niech będzie lepiej", jeśli nie będzie znane znaczenie wyrazu „lepiej".
3. Skonstruowanie modelu formalnego, który najczęściej ma postać modelu matematycznego. W modelu tym w sposób sformalizowany opisane są istotne, z punk-

tu widzenia celu modelowania, cechy i związki między tymi cechami. Bardzo ważną właściwością tego etapu jest to, że modele, identyczne z matematycznego punktu widzenia, opisywać mogą bardzo różnorodne obiekty rzeczywiste. Przykładowo jeden z modeli proliferacji rakiet jest tożsamy z modelem chińskiej gry „w parasole". Ta właściwość modeli w znakomitym stopniu wpłynęła na rozpowszechnienie BO w odległych od siebie obszarach: od zagadnień wojskowych, poprzez ekonomiczne, do psychologicznych i socjologicznych.

4. Sformułowanie zadania (zadań) optymalizacyjnego w języku skonstruowanego modelu matematycznego. Zadanie to jest wyrażonym w języku matematycznym poleceniem wyznaczenia takiego sposobu oddziaływania na rzeczywistość, aby zapewnić osiągnięcie ustalonego w etapie drugim celu. Niezbędnym fragmentem tego etapu BO jest ustalenie, jakimi informacjami będzie dysponowała osoba (zespół) podejmująca decyzję o oddziaływaniu na rzeczywistość, w czasie podejmowania tej decyzji. W modelu matematycznym są bowiem wymienione istotne cechy obiektu i związki między tymi cechami, natomiast w sformułowaniu zadania optymalizacyjnego zawrzeć można tylko te informacje o cechach i związkach, które będą mogły być uwzględniane przy rozwiązywaniu zadania optymalizacyjnego.
5. Rozwiązanie sformułowanego zadania optymalizacyjnego jest kolejnym etapem BO. Może to być tylko wyznaczenie jednego, pożądanego sposobu oddziaływania na rzeczywistość. Najczęściej jednak etap ten polega na opracowaniu pewnej metody, przedstawionej w postaci odpowiedniego algorytmu lub programu komputerowego, która zastosowana zostaje w czasie podejmowania decyzji po „wprowadzeniu" wszystkich dostępnych informacji o obiekcie rzeczywistym. Metody takie w większości analizowanych w BO zadaniach optymalizacyjnych mają charakter uniwersalny, co wynika z uniwersalności pewnych klas modeli matematycznych i odpowiednich zadań optymalizacyjnych. Ta uniwersalność metod bardzo często skutkuje tym, że BO rozumiane są wyłącznie jako zbiór tych metod[3], podczas gdy metody mają charakter matematyczny i są tym samym fragmentami osiągnięć matematyki. Nie zmienia to faktu, że w BO niepoślednią rolę pełnią matematycy, których zadaniem jest poszukiwanie kolejnych metod rozwiązywania zadań optymalizacyjnych, dotyczących nowych obszarów zastosowań BO lub nowych sposobów podejścia przy formułowaniu celów modelowania matematycznego, szczególnie w warunkach niekompletnej informacji o obiekcie rzeczywistym w czasie podejmowania decyzji.

[3] Co czasami potwierdzają również niektórzy matematycy twierdzący, że prawdziwą matematykę stanowią wyłącznie te teorie i rozważania, które nie mają żadnego powiązania z zastosowaniami praktycznymi. Są oni zwolennikami tzw. czystej matematyki, a powyższy pogląd jeszcze stosunkowo niedawno królował w uniwersytetach, w tym również polskich.

6. Analiza otrzymanego rozwiązania zadania optymalizacyjnego z punktu widzenia jego poprawności i celowości zastosowania. Na wcześniejszych etapach BO rozpatrywany obiekt rzeczywisty i związany z nim problem opisywany jest zawsze w sposób przybliżony. W konsekwencji otrzymane rozwiązanie zadania optymalizacyjnego „obciążone" jest tymi przybliżeniami i może nie odpowiadać faktycznym potrzebom lub wręcz może być sprzeczne z oczekiwaniami. Rozwiązanie takie, mimo że matematycznie poprawne, może być więc niewłaściwe lub nawet szkodliwe w konkretnej sytuacji decyzyjnej. W wyniku przeprowadzonej analizy może więc nastąpić potrzeba powrotu do wcześniejszych etapów BO lub nawet konieczność rezygnacji z modelowania matematycznego.
7. Opracowanie projektu oddziaływania na rzeczywistość (przeprowadzenia właściwej „operacji") następuje po otrzymaniu pozytywnych wyników analizy rozwiązania. Rozwiązanie mające postać matematyczną musi być przedstawione w postaci umożliwiającej jego wprowadzenie w konkretnych warunkach rzeczywistych. Może to być odpowiedni plan, rysunek, czy też dokument decyzyjny.

Podczas wykonywania każdego z wymienionych etapów BO, nie tylko podczas analizy otrzymanego rozwiązania, może wystąpić potrzeba powrotu do etapów wcześniejszych. Następuje to, gdy przykładowo model nie zawiera elementów niezbędnych do sformułowania zadania optymalizacyjnego, gdy zadanie optymalizacyjne nie ma rozwiązań, lub gdy rozwiązanie takie jest niemożliwe do wyznaczenia w dostępnym czasie i przy wykorzystaniu posiadanych zasobów komputerowych. Ta właściwość „powtarzalności" etapów jest kolejną cechą charakterystyczną dla BO i wpływa na ograniczoność ich zastosowań.[4]

2. MODEL MATEMATYCZNY

Model matematyczny jest opisem, którego językiem jest język matematyki, cech i związków między nimi, charakterystycznych dla rozpatrywanego obiektu rzeczywistego i istotnych z punktu widzenia celu modelowania. Formalny opis każdej z wybranych cech polega na jednoznacznym przyporządkowaniu jej symbolu zmiennej oraz określeniu zbioru możliwych wartości tej zmiennej. Określenie tego zbioru wynika z „fizycznych" właściwości rozpatrywanej cechy. Zbiór taki może być więc przykładowo podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych czy też zbiorem ustalonych funkcji rzeczywistych zmiennych rzeczywistych. Związki między wyróżnionymi ce-

[4] Badania operacyjne wymagają zamiłowania do systematyczności. Nic więc dziwnego, że powstały w Wielkiej Brytanii, a obecnie najszerzej są stosowane w USA – znane jest przywiązanie Amerykanów do opracowywania procedur postępowania w różnych sytuacjach, które mogą się zdarzyć w przyszłości. W naturze Polaków bardziej leży improwizacja.

chami mogą mieć różny charakter zależny od ich natury. Mogą być to związki przyczynowo-skutkowe, korelacyjne, fizyczne i inne. Związki te najczęściej przedstawiane są w postaci funkcji zdaniowych zmiennych będących symbolami zmiennych przyporządkowanymi cechom. Wartość logiczna takiej funkcji zdaniowej jest prawdą dla takich wartości zmiennych, dla których zachodzi rozpatrywany związek, i jest nieprawdą, gdy dla tych wartości związek nie zachodzi. Każdej funkcji zdaniowej odpowiada więc zbiór takich wartości zmiennych, dla których związek zachodzi. Z formalnego punktu widzenia zbiór ten jest pewną relacją określoną na iloczynie kartezjańskim zbiorów możliwych wartości cech występujących w związku. Tym samy model matematyczny może być traktowany jako para uporządkowana:

$$\langle C, R \rangle$$

gdzie: **C** jest opisem cech obiektu, np. w postaci ciągu symboli zmiennych i zbiorów ich możliwych wartości, **R** jest opisem związków między cechami, np. w postaci ciągu relacji.

Powyższy sposób interpretacji modelu matematycznego pomija aspekt odpowiedniości tego modelu do obiektu rzeczywistego. Konsekwencją takiego podejścia jest to, że identyczny, w powyższym sensie, modele matematyczne mogą odpowiadać skrajnie różniącym się obiektom rzeczywistym. Z tego powodu (np. w etapie analizy rozwiązania) w BO równie ważna jest informacja o odpowiedniości między elementami modelu matematycznego rozpatrywanymi wyłącznie w sposób formalny, a opisem werbalnym rozpatrywanego obiektu rzeczywistego i problemu z nim związanego. Wielu autorów na ten aspekt modelowania matematycznego kładzie główny nacisk.

W początkowym okresie swojego rozwoju BO zajmowały się przede wszystkim takimi modelami, w których zakładano pełną wiedzę o cechach i łączących je związkach. Nawet zjawiska losowe traktowane były w modelach jako cechy opisywane odpowiednimi, znanymi liczbami. Takie podejście było bardzo efektywne, gdyż pozwalało na zastosowanie ścisłych, matematycznych rozważań do obszarów, w których stosowano dotychczas wyłącznie metody intuicyjne. Modele matematyczne oparte na takiej filozofii noszą nazwę modeli „twardych”. Skutkiem ich badania był znaczący rozwój metod rozwiązywania zadań optymalizacyjnych formułowanych w takim „twardym” języku modeli. Powstały takie działy matematyki jak programowanie matematyczne, teoria grafów i sieci, teoria gier, teoria sterowania optymalnego, rachunek wariacyjny i inne. Przy ich pomocy rozwiązywano wiele skomplikowanych problemów praktycznych początkowo głównie militarnych, a później coraz częściej cywilnych. Zastosowanie BO w niektórych dziedzinach przynosiło ich autorom nie tylko sławę naukową, ale również wymierne korzyści finansowe np. w postaci nagrody Nobla. W stosunkowo krótkim jednak czasie okazało się, że modele „twarde" mają coraz mniejszy zakres nowych zastosowań, a analizowane zjawiska nie mogą być opisywane dotychczasowymi metodami. Głównymi przyczynami takiego stanu rzeczy było z jednej strony to, że w modelach „twardych" wymagana jest pełna informacja o rozpatrywanych obiektach rzeczywistych, a jej uzyskanie jest często zbyt kosztowne, a czasami wręcz niemożliwe (nawet z wykorzystaniem wywiadu). Z drugiej strony w naturze człowieka nie leży posługiwanie się wyłącznie pojęciami „twardymi", a częściej słyszy się określenia, które ze swojej natury nie mogą być jednoznacznie opisane np. ładna pogoda[5], duża skuteczność itp. Ponadto wśród istotnych cech obiektu rzeczywistego, wpływających na możliwość oceny stopnia osiągnięcia celu modelowania mogą występować takie cechy, których wartości będą znane dopiero po podjęciu oddziaływań na obiekt rzeczywisty, mówiąc inaczej – po podjęciu decyzji. Potrzeba uwzględnienia takich różnych aspektów spowodowała, że w BO zaczęto konstruować tzw. „miękkie" modele matematyczne, które z jednej strony wymagały rozbudowy języka matematycznego, a z drugiej strony – opracowania nowych metod formułowania zadań optymalizacyjnych i ich rozwiązywania.

3. ZADANIE OPTYMALIZACYJNE

Przed sformułowaniem zadania optymalizacyjnego jako polecenia wyrażonego w języku modelu (języku matematycznym) należy wszystkie opisane w modelu cechy podzielić na trzy grupy.

Pierwsze z nich nazywane są zmiennymi decyzyjnymi, czasami decyzjami, programami lub strategiami. Są one tymi cechami, wartości których decydent ustala w czasie podejmowania decyzji. Są więc treścią decyzji i opisują uprawnienia decyzyjne decydenta.

Kolejna grupa to wskaźniki, zwane również ocenami, kryteriami, czy też funkcjami celu. Są to te cechy, na wartości których decydent ma wpływ pośredni poprzez ustalanie wartości zmiennych decyzyjnych, i na wartościach których mu zależy. Wskaźniki mogą być interpretowane jako ocena podjętych decyzji, chociaż oczywiście na tę ocenę wpływają nie tylko zmienne decyzyjne.

I w końcu pozostałe cechy w literaturze nazywane są najczęściej danymi[6]. Opisują one warunki zewnętrzne, w jakich podejmowana jest decyzja.

---

[5] Proszę zauważyć, że jeśli Polak użyje określenia „dzisiaj jest ładna pogoda" dnia 15 lipca w Polsce, to inny Polak będzie na ogół wiedział, o co chodzi, natomiast gdyby to powiedział dzwoniąc do Australijczyka, to jego wyobrażenie o pogodzie w Polsce może być znacząco inne.

[6] Użyte tutaj pojęcie różni się od definicji danych w systemie informatycznym.

Dane, zmienne decyzyjne i wskaźniki przedstawiane są w postaci uporządkowanej jako listy, które oznaczmy symbolami **a**, **x**, **w**. Umożliwia to identyfikację wartości poszczególnych cech w zbiorach, w których nie występują symbole cech.

Konstruowanie modelu matematycznego, formułowanie zadania optymalizacyjnego i dobór metody jego rozwiązania poprzedzają w czasie sam proces podejmowania decyzji w oparciu o projekt oddziaływania na rzeczywistość. Tym samym na tych etapach BO posługują się pojęciami ogólnymi, nie ustalając na ogół wartości danych. Można więc w modelu mówić np. o numerze typu notebook'a oraz o jego cenie. Przy podejmowaniu decyzji typ notebook'a jest znany (np. ACER Travelmate 2413WLMi) i znana jest jego cena (3398 PLN). Na etapie modelowania nie muszą być znane konkretne wartości danych, wystarczy, jeśli zostanie ustalone, jakie to mogą być wartości. W konsekwencji zadanie optymalizacyjne powinno być tak sformułowane, aby oznaczało konieczność wyznaczenia pewnych wartości zmiennych decyzyjnych w każdej z rozpatrywanych sytuacji decyzyjnej opisywanej konkretnymi wartościami danych. Mówiąc inaczej dla każdej możliwej sytuacji decyzyjnej i każdej decyzji dopuszczalnej w tej sytuacji należy określić skutki decyzji, czyli ustalić możliwe przewidywane wartości wskaźników. Z kolei z rozpatrywanego problemu wynika, jakie powinny być pożądane skutki oddziaływania na rzeczywistość.

Możliwe sytuacje decyzyjne opisuje zbiór możliwych wartości danych. Wartości te muszą spełniać związki występujące w modelu matematycznym, ale oczywiście wyłącznie te związki, w których występują tylko dane. Można zapisać, że zbiór możliwych wartości danych **A** jest określony tymi relacjami występującymi w ciągu **R**, które obejmują wyłącznie cechy z listy **a**, czyli $\mathbf{A} = \mathbf{R}|_{\mathbf{a}}$.

W pewnej sytuacji decyzyjnej opisywanej wartościami danych $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ możliwe być mogą różne decyzje, ale niekoniecznie takie same dla każdej sytuacji decyzyjnej. Przykładowo inną decyzję o zakupie systemu komputerowego można podjąć, gdy dysponuje się na ten cel kwotą miliona euro, a inną, gdy do dyspozycji jest tylko 10.000 €. Zbiór dopuszczalnych decyzji w sytuacji opisywanej wartościami danych $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ oznaczmy symbolem $\Omega(\mathbf{a})$. Podobnie jak poprzednio jest on generowany przez związki z listy **R** ale wyłącznie te, które zachodzą między zmiennymi decyzyjnymi opisanymi listą **x**, a ustalonymi wartościami danych **a**, co można zapisać w postaci $\Omega(\mathbf{a}) = \mathbf{R}|_{\mathbf{a,x}}$.

Zbiór przewidywanych wartości wskaźników w sytuacji $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ przy podjętej decyzji $\mathbf{x} \in \Omega(\mathbf{a})$ oznaczymy symbolem $\mathbf{S(a,x)}$. Podobnie jak poprzednio jest on wyznaczany na podstawie tych elementów ciągu **R**, w których występują wskaźniki z listy **w** powiązane z danymi **a** i zmiennymi decyzyjnymi **x**, czyli $\mathbf{S(a,x)} - \mathbf{R}|_{\mathbf{a,x,w}}$. To „obcięcie" **R** nie dotyczy jednak pewnego szczególnego związku, który określa, które skutki oddziaływania na rzeczywistość są pożądane. Skutki takie w każdej sytuacji decyzyjnej mogą być różne. Inne będą skutki ustalenia wysokiej ceny przez monopolistę, a inne przy ustaleniu tej samej ceny w warunkach konkurencji. Ogólnie wszystkie skutki, które mogą wystąpić w sytuacji decyzyjnej $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, a które można przewidywać jeszcze przed podjęciem decyzji $\mathbf{x} \in \Omega(\mathbf{a})$ można zdefiniować w postaci zbioru $W(a) = S(a,\Omega(\mathbf{a}) = \{\mathbf{w} \in (\mathbf{a},\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Omega(\mathbf{a})\}$. Ocena zastosowanego sposobu rozwiązania problemu związanego z obiektem rzeczywistym z reguły dotyczy pojawiających się skutków, a nie samych decyzji. Ocenia się przykładowo efekty zastosowania systemu informatycznego, a nie sam system. Można więc przyjąć, że w konkretnej sytuacji decyzyjnej $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ niektóre skutki, czyli pewne elementy zbioru $\mathbf{W(a)}$, są pożądane, a inne – nie. Można to opisać w postaci funkcji określonej na zbiorze $\mathbf{W(a)}$, przyjmującej wartość logiczną **1**, jeśli wartości wskaźników odpowiadają skutkom pożądanym, i **0** w przeciwnym przypadku. Funkcja ta zależeć może od sytuacji decyzyjnej. Przykładowo w pewnych warunkach przedsiębiorca będzie dążył do zapewnienia jak największego zysku, a w innych warunkach zadowoli się tym, że jego przedsiębiorstwo nie zbankrutuje. Funkcję taką można więc przedstawić w postaci $\mathbf{E_a : W(a) \rightarrow \{0,1\}}$. Nazywana jest ona funkcją oceny osiągnięcia celu, czasami funkcją celu lub funkcją kryterium.

Przedstawione wyżej przekształcenie modelu matematycznego pozwala na podanie schematu sformułowania zadania optymalizacyjnego. Jest to następujące polecenie sformułowane wyłącznie w języku matematycznym, bez potrzeby odwoływania się do interpretacji poszczególnych cech i związków.

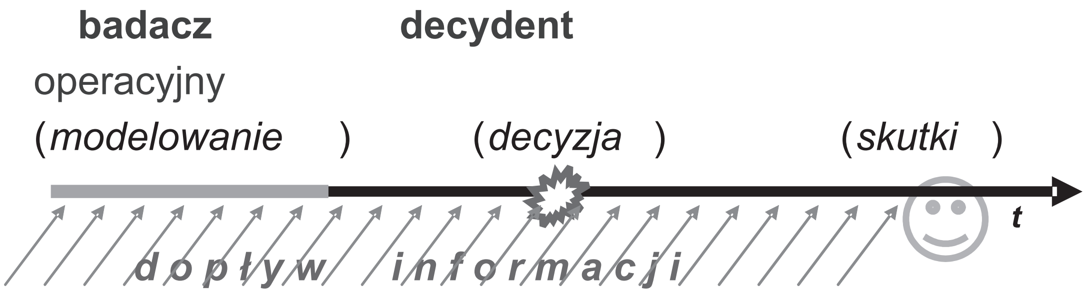
Dla danych $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ należy wyznaczyć takie $\mathbf{x}^* \in \Omega(\mathbf{a})$, aby dla każdej wartości $\mathbf{w} \in \mathbf{S(a,x^*)}$ spełniony był warunek $\mathbf{E_a(w)=1}$.

Opisowo powyższe sformułowanie można przedstawić następująco: dla możliwej sytuacji decyzyjnej należy podjąć taką decyzję, która zagwarantuje osiągnięcie celu. Zbiór $\Omega(\mathbf{a})$ nazywany jest często zbiorem rozwiązań dopuszczalnych (zadania optymalizacyjnego), a rozwiązanie $\mathbf{x}^*$ - rozwiązaniem optymalnym (czyli najlepszym od łac. *optimus* - najlepszy[7]). Często sformułowanie zadania optymalizacyjnego przedstawiane jest w innej, uproszczonej postaci. Każdorazowo jednak zawartość merytoryczne jest taka sama.

[7] A można było niedawno usłyszeć w TVP1 określenie sprawozdawcy zawodów z udziałem Adama Małysza „optymalnie najlepszy”, a niektórzy politycy z zamiłowanie używają określenia „najbardziej optymalny”, co po prostu oznacza odpowiednio „najlepiej najlepszy” oraz „najbardziej najlepszy”.

4. ŹRÓDŁA BRAKU INFORMACJI

W badaniach operacyjnych na braki informacyjne mogą „narzekać” dwie osoby. Po pierwsze „badacz operacyjny”, czyli osoba, która konstruuje model matematyczny, formułuje zadanie optymalizacyjne i opracowuje metodę jego rozwiązania, a z drugiej strony – „decydent”, czyli osoba, która analizuje rozwiązanie otrzymane w konkretnej sytuacji decyzyjnej, opracowuje projekt oddziaływania na rzeczywistość i go wdraża, czyli podejmuje decyzję. Działania tych osób[8] są rozłożone w czasie, jak to przedstawia poniższy rysunek.



W czasie podejmowania decyzji decydent może w pełni znać wartości danych (modele „twarde”), które będą wpływały na skutki jego decyzji, może sam ustalać te wartości (wojenne początki badań operacyjnych), ale może ich po prostu nie znać, mimo że będą one wpływały na ocenę skutków w sposób decydujący. Gracz w brydża prowadząc licytację nie zna precyzyjnie ani kart pozostałych graczy, ani sposobu rozgrywania przez nich rozdania. Tym niemniej podejmuje decyzje, mimo że nie zna ich skutków. Dlaczego skutki decyzji mogą być nieznane decydentowi w chwili podejmowania decyzji?

Po pierwsze dlatego, że na wynik pewnej „operacji” mają też wpływ inni decydenci, którzy nie zdradzili swoich zamiarów. Jest to sytuacja typowa w działaniach wojskowych, grach wieloosobowych, decyzjach ekonomiczny na rynku z działającą konkurencją, czy też choćby przy wyborze kierownika pracy inżynierskiej. Zadania, w których występuje więcej niż jeden decydent, nazywane są zadaniami growymi, a ich badaniem zajmuje się dział matematyki zwany teorią gier. W początkowym okresie rozwoju tej teorii mówiono o teorii gier strategicznych, gdyż strategiami nazywa się decyzje podejmowane przez poszczególnych graczy. Formalnie rzecz ujmując zbiór $\mathbf{W(a)}$ jest zależny od decyzji innych decydentów, czyli na liście $\mathbf{a}$ znajdują się cechy odpowiadające działaniom pozostałych graczy. Funkcja $\mathbf{E_a : W(a) \to \{0,1\}}$

[8] Przy czym fizycznie obie te osoby mogą być w jednej postaci (sam sobie sterem, żeglarzem, okrętem).

jest więc zależna od sytuacji decyzyjnej, w której istotną rolę odgrywają inni decydenci. W teorii gier zakłada się na ogół, że funkcje oceny osiągnięcia celu są określone dla wszystkich decydentów i są im znane. Cele te mogą być sprzeczne, ale również rozpatruje się sytuacje ich częściowej zgodności. Analizuje się zarówno samodzielne działanie decydentów (tzw. gry niekooperacyjne), jak również dopuszcza się możliwość ich współdziałania, czyli tworzenia koalicji (gry kooperacyjne).

Inną przyczyną nieznajomości skutków decyzji może być to, że na te skutki będą wpływały takie cechy, których konkretne wartości będą dopiero w jakiś sposób „wylosowane" już po podjęciu decyzji. Analogiczny przypadek z punktu widzenia decydent zachodzi również wtedy, gdy losowanie następuje przed podjęciem decyzji, ale decydent nie zna wyniku tego losowania[9]. Takie sytuacje były pierwszymi rozpatrywanymi w modelach „miękkich", Charakteryzują się one z formalnego punktu widzenia tym, że w zadaniu optymalizacyjnym pojawiają się zmienne losowe lub procesy stochastyczne, co powoduje, że również wartości wskaźników w czasie „pomiaru" skutków decyzji (czyli w przyszłości) są zmiennymi losowymi w czasie podejmowania decyzji. Decydent zna więc w czasie podejmowania decyzji wyłącznie zmienne losowe, czyli zna rozkłady prawdopodobieństwa tych zmiennych losowych[10]. Gracz w ruletkę, podejmując decyzję o tym, jaką liczbę będzie obstawiał, zna wszystkie rozkłady zmiennych losowych wpływających na wysokość jego wygranej[11], ale jaka liczba padnie dowie się dopiero po zatrzymaniu się koła ruletki. Zadania optymalizacyjne odpowiadające opisywanej sytuacji noszą nazwę podejmowania decyzji w warunkach niepewności lub podejmowania decyzji w warunkach ryzyka, lub też podejmowania decyzji w warunkach losowych. W tych przypadkach zbiór $\mathbf{W(a)}$ zawiera zmienne losowe, a funkcja $\mathbf{E_a : W(a) \rightarrow \{0,1\}}$ musi odpowiadać na pytanie, które losowe skutki są pożądane, a które nie. Ocenom podlegają więc zmienne losowe.

Kolejną przyczyną braku informacji o skutkach decyzji jest to, że na te skutki będą wpływały cechy, których natura nie pozwala, aby ich wartości były znane w pełni. Cechy takie są najczęściej związane z wprowadzenie do modelu matematycznego pojęć w sposób charakterystyczny dla języka potocznego. Pojęcia takie zwykle mają postać wartościującą np. duże zyski, szybki procesor, tani system informatyczny, wydajny pracownik itp. Klasyczna matematyka oparta jest na dychotomii:

[9] A jak dobrze byłoby to znać – wzdychają gracze w Totolotka.

[10] Nie należy mówić, że pewne zjawisko ma charakter losowy, jeśli nie można opisać go w postaci rozkładu prawdopodobieństwa. Słusznie więc odpowiedział prof. Michał Kleiber na stwierdzenie przeprowadzającego z nim wywiad dziennikarza, że „błąd ludzki to także zdarzenie losowe". Odpowiedź brzmiała: „Człowiek jest w stanie popełnić głupstwa, których żaden inny człowiek nie jest w stanie sobie wyobrazić", nie można więc głupstwom popełnianym przez człowieka przyporządkowywać prawdopodobieństw.

[11] Oczywiście o ile koło ruletki nie jest odpowiednio „podrasowane" przez właściciela kasyna.

albo pewien element należy do ustalonego zbioru, albo nie należy. Trudna jednak powiedzieć, czy zysk w wysokości 30.000 € jest zyskiem dużym, czy też nie. Pojęcia o powyższej właściwości noszą nazwę pojęć rozmytych lub nieostrych, a do ich analizy służy teoria zbiorów rozmytych oraz logika rozmyta. Kluczowym pojęciem w tych teoriach jest funkcja przynależności, której wartość dla ustalonego elementu zbioru nazywa się stopniem przynależności tego elementu do zbioru rozmytego[12]. Przykładowo można przyjąć, że stopień przynależności liczby 30.000 do zbioru dużych zysków wynosi 0,7. Podejmowanie decyzji w warunkach rozmytości oznacza taką sytuację, w której skutki podjętych decyzji są elementami zbiorów rozmytych. Przyczyną tego może być nie tylko rozmytość danych, ale również rozmytość zbioru dopuszczalnych rozwiązań. W rozpatrywanych sytuacjach zbiór **W(a)** zawiera zbiory rozmyte. Funkcja $\mathbf{E_a : W(a) \rightarrow \{0,1\}}$ ocenia więc te zbiory rozmyte. Mówiąc inaczej odpowiada na pytanie, której funkcji przynależności odpowiadają skutki pożądane, a której nie.

Braki informacyjne mogą być jeszcze głębsze. Mianowicie w czasie podejmowania decyzji decydent może wiedzieć tylko tyle, że skutki będą nieznanym elementem pewnego znanego zbioru, najczęściej liczbowego, i żadnymi dodatkowymi informacjami decydent nie dysponuje. Zauważmy, że przy podejmowaniu decyzji w warunkach niepewności (ryzyka) znane były rozkłady prawdopodobieństwa odpowiednich zmiennych losowych. Przy podejmowaniu decyzji w warunkach rozmytości znane były funkcje przynależności. Decydent dysponował więc pewnymi informacjami dodatkowymi o skutkach swoich decyzji. W opisywanym przypadku nie ma żadnej dodatkowej wiedzy. Sytuacja taka nosi nazwę podejmowania decyzji w warunkach nieokreśloności (czasami nazywa się je warunkami niepewności, gdy wcześniej opisaną sytuację określa się jako losową lub niepewną). Zadania optymalizacyjne związane z opisywanym przypadkiem były rozpatrywane już stosunkowo dawno i czasami nazywane były grą z naturą, gdyż to nieświadoma natura miała decydować o skutkach zastosowanych strategii, a nie świadomie działający gracz – przeciwnik. Natura charakteryzuje się tym, że nie są znane jej preferencje. Mówiąc inaczej nie wiadomo, jakimi wskaźnikami (kryteriami, celami) kieruje się natura[13]. Podejmowanie decyzji w warunkach nieokreśloności może mieć przykładowo miejsce wtedy, gdy lokujemy pieniądze w banku przy zastosowaniu zmiennego oprocentowania. Możemy więc przyjąć, że oprocentowanie po roku będzie liczbą z pewnego przedziału, ale nic więcej o niej

[12] Za twórcę tych teorii powszechnie uważa się Amerykanina urodzonego w Baku w Azerbejdżanie, L. A. Zadeha, aczkolwiek, jak wieść niesie, podobne pomysły opublikował przed nim Polak, posługując się niestety językiem „niekonferencyjnym", czyli polskim.

[13] Chociaż zdecydowanie inna opinia zawarta jest w słynnym Prawie Murphy'ego: „Jeżeli cokolwiek może pójść źle, to tak właśnie pójdzie", gdzie natura zawsze jest w najwyższym stopniu złośliwa, a celem głównym jej działania jest zaszkodzenie człowiekowi, a szczególnie informatykowi.

powiedzieć nie możemy. Przy podejmowaniu decyzji w warunkach nieokreśloności zbiór **W(a)** jest rodziną zbiorów liczbowych, a funkcja $\mathbf{E_a : W(a) \rightarrow \{0,1\}}$ pokazuje, które zbiory odpowiadają skutkom pożądanym, a które nie.

Sytuacja może być jednak jeszcze trudniejsza. Powyżej założono znajomość zbioru, którego elementem będą przyszłe skutki. Ale skąd taki zbiór wziąć? Przykładowo podejmowana jest decyzja o doborze zestawu testów niezawodnościowych dla produkowanych układów elektronicznych. Wyniki każdego testu mogą być różne, ale dzielą one zbiór wszystkich testowanych układów na podzbiory, w których znajdują się układy z identycznymi wynikami testów. O niektórych podzbiorach można powiedzieć, że na pewno zawierają układy niespełniające wymagań niezawodnościowych. O innych, że zawierają układy w pełni dobre. Ale co powiedzieć o pozostałych układach? A co odpowiedzieć na pytanie: „Które z testowanych układów spełniają wymagania niezawodnościowe?" Wiadomo, które na pewno tak, wiadomo też, które na pewno nie. Te dwa zbiory określają w sposób przybliżony zbiór układów poprawnych. Takie rozumowanie jest podstawą tzw. teorii zbiorów przybliżonych[14], w której przykładowy zbiór układów na pewno poprawnych jest tzw. przybliżeniem dolnym zbioru układów sprawnych, a zbiór układów, które mogą być poprawne jest tzw. przybliżeniem górnym tego zbioru. Teoria zbiorów przybliżonych powiązana jest z tzw. logiką przybliżoną służącą do analizy zdań określonych na zbiorach przybliżonych. W opisywanych przypadkach zbiór **W(a)** jest rodziną zbiorów przybliżonych, a funkcja $\mathbf{E_a : W(a) \rightarrow \{0,1\}}$ zawiera informacje, które z przybliżeń odpowiadają skutkom poprawnym, a które skutki są niepożądane. Decydent podejmujący decyzję w warunkach przybliżoności (czy można tak powiedzieć?) jest w sytuacji najmniej komfortowej w stosunku do rozpatrywanych wcześniej – jego wiedza o skutkach decyzji jest „najmniejsza"[15].

Czy na tym koniec? Oczywiście że nie. Bazując na prawie Murphy'ego można powiedzieć, że zawsze spotkać się można z sytuacją, z którą nie można sobie poradzić stosując powyższe metody. Należy więc oczekiwać kolejnych formalnych opisów problemów decyzyjnych, które nie odpowiadają żadnemu z przedstawionych podejść. Można wręcz powiedzieć, że opisy takie już istnieją. Przykładowo są to przypadki mieszane, w których jednocześnie występują przyczyny opisane powyżej w różnych grupach przypadków. Może to być sytuacja, gdy skutek decyzji jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, ale parametry tego rozkładu[16] znane są tylko z pewną dokładnością.

A co można powiedzieć o wiedzy „badacza operacyjnego" w czasie, gdy formułuje on zadanie optymalizacyjne?

[14] Już w pełni autorstwa Polaka prof. Z. Pawlaka.
[15] I znowu mamy pojęcie rozmyte.
[16] Parametrami rozkładu normalnego są wartość oczekiwana i odchylenie standardowe.

Po pierwsze nie może zakładać, że dysponuje o obiekcie rzeczywistym wiedzą szerszą niż tą, którą będzie posiadał decydent w czasie podejmowania decyzji. Wynika to z faktu, że opracowana metoda rozwiązania zadania optymalizacyjnego może bazować wyłącznie na takich informacjach, które będą możliwe do „wprowadzenia" jako konkretne wartości danych do odpowiedniego algorytmu czy programu komputerowego. Formułując zadanie optymalizacyjne każdorazowo „badacz operacyjny" powinien sformułować pytanie: „Co decydent będzie wiedział o wartościach danych w czasie podejmowania decyzji?" Oczywiście odpowiedzi na to pytanie może udzielić wyłącznie decydent. Stąd, między innymi, w badaniach operacyjnych wymagana jest współpraca pomiędzy „badaczem operacyjnym" a decydentem.

Pozostaje jednak jeszcze nierozstrzygnięte jedno zagadnienie. Mianowicie określić należy, jakie skutki decydent uznaje za pożądane, a jakie nie. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że wskaźniki mają taką postać, iż „im większa wartość wskaźnika, tym lepiej"[17].

Gdy skutek decyzji $\mathbf{x} \in \Omega(\mathbf{a})$ podjętej w sytuacji decyzyjnej $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ jest liczbą f(a,x), to skutkiem pożądanym jest największa liczba należąca do zbioru W(a) zawierającego wszystkie możliwe skutki. Zadanie optymalizacyjne w takim przypadku jest zadaniem maksymalizacji funkcji f(a,x) zwanej funkcją kryterium (funkcją celu) ze względu na zmienną x, przy parametrze a i ograniczeniach określonych zbiorem $\Omega(\mathbf{a})$. Metody rozwiązywania takich zadań są bardzo rozbudowane, często stosowane i w dalszym ciągu rozwijane.

Sytuacja jednak komplikuje się bardziej, gdy zbiór W(a) zawiera inne obiekty matematyczne. Przykładowo mogą to być wektory składające się z liczb. Przypadek taki opisuje i analizuje tzw. optymalizacja wielokryterialna (wektorowa) zwana też polioptymalizacją. Skutkiem pożądanym będzie wtedy taki skutek, dla którego wartość każdego ze wskaźników jest maksymalna[18]. Ale taki skutek może w zbiorze W(a) nie występować. Nie ma jednak uzasadnienia formułowanie zadania optymalizacyjnego, którego nie można rozwiązać (żadnemu z elementów zbioru W(a) nie byłaby przyporządkowana wartość 1, nie istniałoby w takim razie rozwiązanie optymalne). Optymalizacja wielokryterialna sugeruje jednak wiele metod postępowania w takich przypadkach. Tym metodom odpowiadają różne funkcje $\mathbf{E_a} : \mathbf{W(a)} \rightarrow \{\mathbf{0,1}\}$ oceny osiągnięcia celu. Przykładowo pożądanymi są takie skutki, którym odpowiadają niezdominowane[19] elementy zbioru W(a) w sensie relacji Pareto[20]. W takim razie problemem dla „badacza operacyjnego" jest: „Którą z możliwych funkcji oceny osiągnięcia

[17] Sytuację przeciwną można zawsze sprowadzić do powyższej mnożąc wartość wskaźnika przez (-1).

[18] Lepiej być pięknym, bogatym i zdrowym niż brzydkim, biednym i chorym.

[19] Czyli takie, dla których nie występują elementy lepsze.

[20] Dwa wektory są w relacji Pareto, jeśli jeden z nich zawiera element większy niż drugi, a pozostałe jego elementy są niemniejsze.

celu należy wybrać, aby rozwiązanie zadania optymalizacyjnego zapewniało osiągnięcie pożądanych skutków, czyli aby było rozwiązaniem optymalnym?". I znowu odpowiedź na to pytanie może być udzielona wyłącznie przez decydenta. Tym razem jednak odpowiedź wynika z preferencji decydenta, a nie z jego wiedzy o wartościach danych.

Podobnie jak wyżej wygląda sytuacja, gdy w czasie podejmowania decyzji wiedza decydenta o wartościach danych nie jest pełna. Oferowane są różne filozofie ustalania, które z możliwych skutków decyzji powinny być pożądane. W każdym więc przypadku „badacz operacyjny" powinien poznać preferencje decydenta pozwalające mu skonstruować taką funkcję $\mathbf{E_a : W(a) \to \{0,1\}}$, która będzie zgodna z oczekiwaniami decydenta i jednocześnie będzie właściwa dla konkretnego problemu związanego z rozpatrywanym obiektem rzeczywistym. A jeśli preferencje decydenta nie są znane? Wtedy pozostaje zaoferowanie pełnego wachlarza uzasadnionych metod formułowania zadań optymalizacyjnych i dla każdej z nich podanie sposobu wyznaczania rozwiązania optymalnego. Sytuacja taka ma najczęściej miejsce, gdy „badacz operacyjny" analizuje różne możliwe sytuacje decyzyjne i opracowuje sposoby ich opisu w postaci modelu matematycznego i zadania optymalizacyjnego. Głównie więc występuje podczas rozwoju teorii badań operacyjnych.

5. METODY FORMUŁOWANIA ZADANIA OPTYMALIZACYJNEGO

Dla każdego z rozpatrywanych powyżej przypadków niekompletności informacji o wartościach danych w czasie podejmowania decyzji proponuje się wiele metod ustalania, które z możliwych skutków decyzji należy uznać za pożądane, a które nie. Nie jest celem tego wykładu ich pełna prezentacja (jest to też niemożliwe ze względu na obszerność zagadnienia), dlatego poniżej zostaną podane wyłącznie opisy sposobów rozumowania uzasadniających te metody.

Pierwszy pomysł polega na tym, aby nieliczbowe skutki podjętych decyzji (w sensie ich znajomości w czasie podejmowania decyzji) zastąpić ich pewnymi charakterystykami liczbowymi, zamieniając tym samym problem początkowy na zadanie maksymalizacji lub minimalizacji utworzonej w ten sposób funkcji kryterium. I tak w poszczególnych przypadkach tymi liczbami mogą być:

- przy podejmowaniu decyzji w warunkach niepewności (ryzyka): wartość oczekiwana zmiennej losowej, jej kwantyl określonego rzędu, odchylenie standardowe, prawdopodobieństwo zajścia pewnych zdefiniowanych zdarzeń lub inne wielkości charakteryzujące zmienne losowe;
- przy podejmowaniu decyzji w warunkach rozmytości: stopień przynależności decyzji do zbioru decyzji dopuszczalnych, stopień przynależności skutków decyzji do zbioru skutków pożądanych lub inne charakterystyki zbiorów rozmytych;

- przy podejmowaniu decyzji w warunkach nieokreśloności: najmniejszy lub największy element zbioru liczbowego albo ich kombinacja wypukła, wielkości tych zbiorów lub ich inne charakterystyki;
- przy podejmowaniu decyzji w warunkach przybliżoności: elementy najmniejsze lub największe przybliżeń dolnych albo górnych, albo ich kombinacji wypukłej, wielkość przybliżenia lub inne charakterystyki.

Pomysł kolejny to zastąpienie skutków decyzji wektorami, których elementami są wybrane charakterystyki obiektów matematycznych, będących tymi skutkami. Przy podejmowaniu decyzji w warunkach niepewności (ryzyka) następuje tym samym przekształcenie problemu losowego na problem wielokryterialny, dla którego następnie poszukuje się metody spośród metod oferowanych przez polioptymalizację. Przykładowo, gdy skutkiem decyzji jest zmienna losowa, to można ją zastąpić jednocześnie dwoma liczbami – wartością oczekiwaną i odchyleniem standardowym. Poszukiwane będą wtedy rozwiązania, które mają odpowiednio wysokie skutki średnie przy wielokrotnym powtarzaniu procesu decyzyjnego, i ponadto są wysoko przewidywalne.

Cała grupa kolejnych pomysłów sprowadza się do zastąpienia tych wskaźników, które zostały wybrane z modelu matematycznego, innymi wskaźnikami odzwierciedlającymi różne możliwe preferencje decydentów. Przykładowe propozycje to:

- Zastąpienie zmiennej losowej pewną wielkością nazywaną użytecznością, a następnie formułowanie zadania maksymalizacji tej użyteczności. Teoria użyteczności rozwijała się dość intensywnie w latach 60-tych XX wieku i dotyczyła nie tylko zmiennych losowych. Okazało się jednak, że ma szereg ograniczeń. Jednym z nich jest to, że pojęcie użyteczności ma charakter indywidualny i nie jest możliwe, w przypadku ogólnym, skonstruowanie użyteczności grupowej przy znajomości użyteczności indywidualnych członków grupy. A jak mogą się różnić między sobą oceny indywidualne wskazują np. wyniki badań prof. Paula Slovica z USA dotyczące percepcji współczesnych zagrożeń[21].
- Zastąpienie konkretnych skutków ustalonej decyzji żalem wynikającym z podjęcia tej decyzji, niekoniecznie najlepszej w sytuacji, która nastąpiła po podjęciu decyzji. Żal mierzony jest różnicą pomiędzy tym, co można byłoby osiągnąć, a tym, co osiągnięto faktycznie. Dla tak otrzymanych nowych zbiorów liczbowych stosuje się następnie jedno z podejść charakterystycznych dla podejmowania decyzji w warunkach nieokreśloności.

[21] W powszechnym odczuciu największe zagrożenie stanowią elektrownie atomowe. Spowodowało to tak silny nacisk na zwiększenie bezpieczeństwa ich działania, że na jedno potencjalnie uratowane z tego powodu życie wydatkowano 2,5 mld dolarów.

- Zastąpienie zbiorów zmiennych losowych wielkościami zwanymi efektywnością wskaźników. Są to pary liczb: wartość zmiennej losowej i odpowiadająca jej wartość dystrybuanty. Dla takich par wprowadza się pewną relację dominowania, a następnie stosuje metody optymalizacji wielokryterialnej.

Czasami proponuje się wstępne eliminowanie z rozważań niektórych sytuacji, np. mało prawdopodobnych. Gdy nie ma innych pomysłów na sformułowanie zadania optymalizacyjnego, to można posłużyć się metodą polegającą na przedstawieniu wszystkich skutków wszystkich decyzji dopuszczalnych, a następnie wybranie z nich decyzji najlepszej metodą niesformalizowaną np. poprzez przeprowadzenie głosowania. Taki sposób podejścia można jednak stosować wyłącznie wtedy, gdy decyzji poddanych głosowaniu jest niewiele (część decyzji można odrzucić wcześniej jako zdominowane innymi). Postępowanie takie może być zalecane szczególnie wtedy, gdy skutki decyzji mają charakter polityczny i dotyczą licznej społeczności.

6. ZAKOŃCZENIE

Badania dotyczące matematycznych metod podejmowania decyzji przy niepełnej informacji są ciągle rozwijane. Zwraca się przy tym uwagę na różne aspekty braku informacji. Przykładowo Zdzisław Bubnicki proponuje posługiwanie się tzw. zmiennymi niepewnymi przy wprowadzeniu pojęcia przybliżonej wartości zmiennych, analizując przy tym dla układów sterowania dwie podstawowe przyczyny niemożności deterministycznego sformułowania zadania sterowania optymalnego: naturę sterowanego obiektu oraz niewiedzę badacza podającego matematyczny opis obiektu. Wachlarz możliwych podejść do zagadnień optymalizacyjnych przy niepełnej informacji w zasadniczy sposób został rozszerzony przez zastosowanie środków informatyki, jak również został wymuszony przez potrzeby wynikające z konieczności przetwarzania olbrzymich ilości danych przez informatyczne systemy wspomagające podejmowanie decyzji. Rozwój metod tzw. sztucznej inteligencji wiąże się bardzo silnie z tą problematyką. O ważności tych zagadnień zarówno dla zastosowań praktycznych jak i dla badań naukowych dobitnie świadczy przyznanie w 2005 roku tzw. „Polskiego Nobla”, czyli prestiżowej nagrody Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej, informatykowi Romanowi Słowińskiemu za opracowanie metodyki komputerowego wspomagania decyzji podejmowanych na podstawie niepełnych danych.

Literatura

1. Bellman R. E., Giertz M., *On the Analytical Formalism of Fuzzy Sets.* Information Sciences, 5
2. Bubnicki Z., *Uncertain variables – a new tool for analysis and design of knowledge-based control systems*. Modeling, Identification and Control, vol. Ii, Acta Press, Zurich 2001
3. Bubnicki Z., *Analysis and Decision Making in Uncertain Systems*. Series: Communications and Control Engineering, Springer-Verlag, Heidelberg 2004
4. Chojnacki A., *Modelowanie matematyczne*. WAT, Warszawa 1996
5. Corne D. i inni, *New Ideas of Optimization.* Advanced Topics in Computer Science, McGraw--Hill, London 1999
6. Kacprzyk J., *Zbiory rozmyte w analizie systemowej*. PWN, Warszawa 1987
7. Pawlak Z., *Rough Sets, Decision Algorithms and Bayes' Theorem.* European Journal of Operational Research, 136
8. Rutkowski L., *Metody i techniki sztucznej inteligencji*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005
9. Słowiński R. i inni, *Algorytmy inteligentnej eksploracji danych i wspomagania decyzji*. KBN praca badawcza 2000-2003
10. Zadeh L. A., *Fuzzy Sets*. Information and Control, 8