

FRAKTALE WOKÓŁ NAS I KILKA SŁÓW O CHAOSIE

Streszczenie

W artykule zawarte są podstawowe informacje na temat geometrii fraktalnej oraz chaosu pojawiającego się w obliczeniach. Przedstawione są w nim przykłady struktur fraktalnych występujących w środowisku naturalnym, w tym w wybranych procesach atmosferycznych. Materiał ten ma zachęcić ambitnych studentów do sięgnięcia do bardzo bogatej literatury.

Abstract

The article presents basic information on fractal geometry and chaos, which appeared during different calculations. Some examples of fractal structures in environment and in the processes in the atmosphere are included. This article is aimed to raise interest of ambitious students to refer them to the literature.

1. WSTĘP – DEFINICJA FRAKTALA. FRAKTALE W NATURZE

Co to jest Fraktal wie każdy, choć może nie jest tego świadomy. Jeżeli ktoś nie potrafi poprawnie zdefiniować tego terminu, to na pewno go słyszał. Otóż, fraktal jest pewną strukturą samopodobną spełniającą kilka warunków, z których najważniejszym jest wymiar fraktalny Hausdorffa² (właściwie: Hausdorffa–Besicovitcha). Ten konkretny warunek zakłada, że wymiar Hausdorffa fraktala jest niemniejszy od jego wymiaru topologicznego. A to oznacza, że dowolna krzywa jakiegoś kształtu jest topologicznym równoważnikiem prostej linii i ma topologiczny wymiar wynoszący jeden. Oznacza to również, że wymiar krzywej nie może być mniejszy od jedności, a figury płaskiej od dwóch.

¹ Prof. dr hab. inż. wykłada w Warszawskiej Wyższej Szkole Informatyki. Jest etatowym pracownikiem Wojskowej Akademii Technicznej.

² **Felix Hausdorff** (ur. 8 listopada 1868 roku we Wrocławiu (wówczas Breslau), zm. 26 stycznia 1942 roku w Bonn) – niemiecki matematyk, jeden z twórców topologii.

Ponadto, musimy zapamiętać, że wymiar topologiczny punktu (oraz zbioru punktów) jest równy zeru.

Fraktal powstaje w wyniku niezbyt złożonej procedury geometrycznej. Jednak każda taka konstrukcja prowadzi do przybliżenia, a nie do efektu ostatecznego. Tak więc:

- Fraktale istnieją jedynie jako idealizacja zjawiska.
- Fraktale są obiektami granicznymi opisywanymi nie wzorem, ale zależnościami rekurencyjnymi.

Z tego drugiego powodu wprowadzono wymiar Minkowskiego-Bouliganda w postaci granicy ciągu liczbowego.

Co to znaczy, że pewna struktura geometryczna jest samopodobna? Otóż, najlepiej to wyjaśnić na przykładzie linii prostej. Każdy jej fragment jest podobny do całości. Nie jest ważne, czy z niej wytniemy odcinek o długości 1 kilometra, 1 metra, czy 10 centymetrów. Każdy z tych fragmentów jest podobny do całej prostej. Jednak uwaga: prostej nie uważa się za fraktal. Oprócz cechy samopodobieństwa, fraktal musi spełniać warunki, których prosta nie spełnia.

Zasada samopodobieństwa występuje w matematyce wielokrotnie. Jednym z najstarszych i najważniejszych przykładów jest nasz układ dziesiętny. Jeden metr dzieli się na dziesięć decymetrów, decymetr na dziesięć centymetrów, centymetr na dziesięć milimetrów itd.

Z powyższego opisu wynika, że fragment zbioru powinien być podobny do całości. Pojawia się naturalne pytanie: jak głęboko możemy „wchodzić” w wydzielone fragmenty? Czy jest gdzieś granica takiego „zanurzania się” i otrzymywania kolejnego mniejszego obiektu, ale podobnego do zbioru wyjściowego? Otóż, w geometrii opisywanej równaniem rekurencyjnym nie ma takiej granicy. W matematycznym modelu fraktali własność samopodobieństwa przenosi się na następną generację nieskończenie wiele razy.

Ale w naturze – jest! Shaun Lovejoy [3], [5], geofizyk kanadyjski, analizował prawdziwe chmury na podstawie zdjęć satelitarnych. W wyniku tych badań doszedł do nadzwyczajnego wniosku: **nie dość, że chmury są fraktalami, to jeszcze w siódmym „zanurzeniu” ich wymiar fraktalny jest taki sam.** Taki stopień jednorodności jest praktycznie bezprecedensowy wśród zjawisk naturalnych. Przykłady chmur, które najtrafniej obrazują budowę fraktalną przedstawiamy na rysunku 1.

Chmury Cumulus (Cu) i Altocumulus (Ac) są najlepszym przykładem fraktali



Rys. 1. Chmury Cumulus i Altocumulus. Prawy dolny rysunek jest wynikiem symulacji komputerowej



Rys. 2. Błyskawica

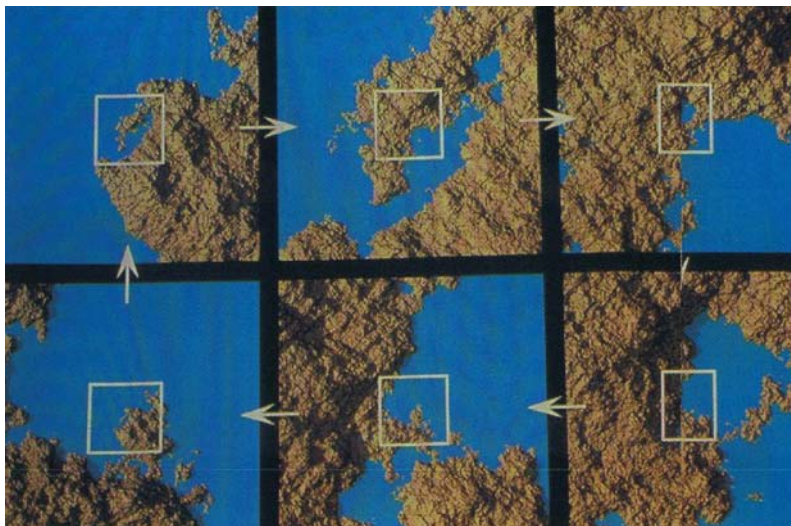
Lovejoy badał także opady deszczu, stwierdzając, że granice obszarów pokrytych deszczem stanowią fraktal. Co więcej, deszcz ma tendencję do padania nieregularnymi zrywami, a jego zmiany w krótkich i długich skalach czasu są podobne, tak więc czasowa struktura deszczu jest również fraktalna.

Niektóre obiekty mogą charakteryzować się zmiennym wymiarem fraktalnym. Oznacza to, że (przykładowo) chmury lub błyskawice na kilku pierwszych poziomach zanurzenia charakteryzują się wymiarem fraktalnym D_1 , a na kilku kolejnych wymiarem D_2 . Mamy wówczas do czynienia

z „przeplatającymi się” fraktalami, czyli tzw. **multifraktalem**. Zagadnienie to opisuje m.in. prof. Wiesław Macek [19].

Kolejnym fraktalem zaczerpniętym z natury jest wyładowanie atmosferyczne – błyskawica. Błyskawica nie jest linią prostą. W każdym jej fragmencie możemy dostrzec podobieństwo do obrazu wyładowania początkowego (rysunek 2).

Wiemy już, że miarą samopodobieństwa jest pewna liczba, zwana wymiarem fraktalnym. Jej wyznaczenie w jednym przypadku jest proste, w innym dość złożone. Opis tej metodyki można znaleźć w różnych źródłach (patrz wykaz literatury).



Rys. 3. Podobieństwo fragmentów linii brzegowej

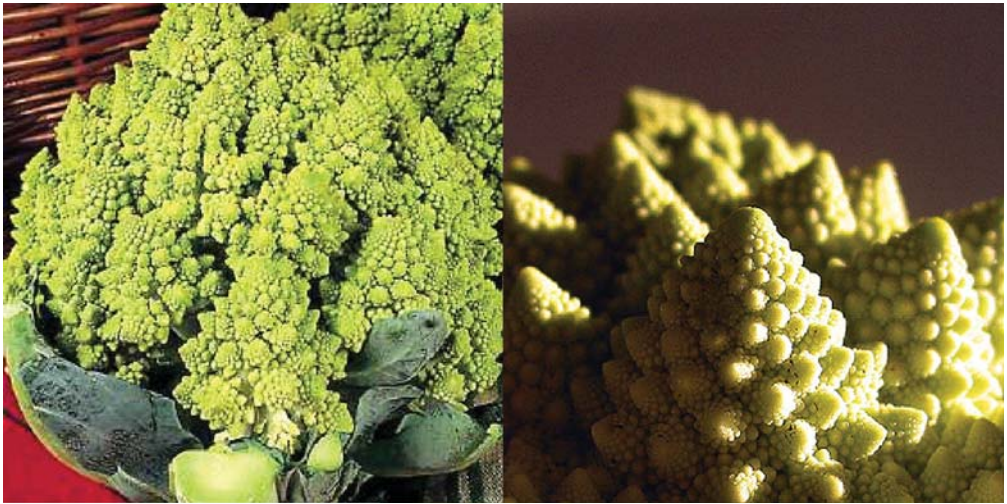


Rys. 4. Punkt Zabriskiego w Dolinie Śmierci ilustruje fraktalne ukształtowanie terenu

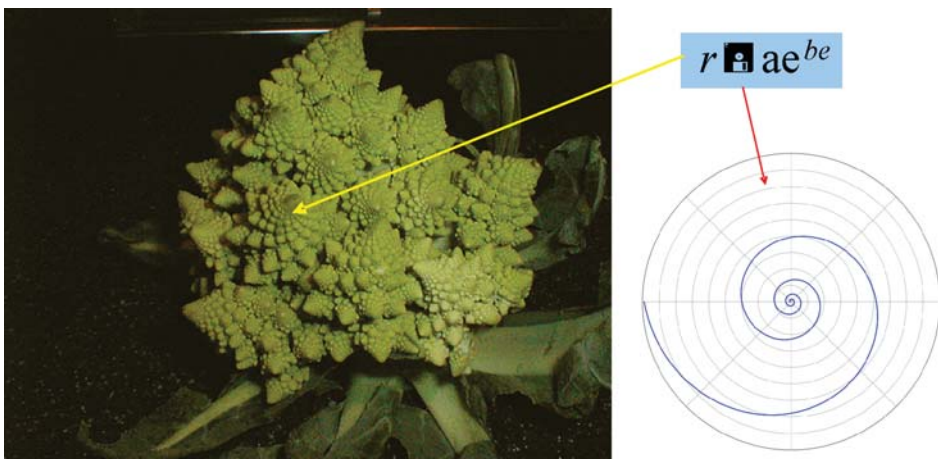
Powyżej zamieszczamy kilka innych przykładów takiego samopodobieństwa. Na rysunku 3 przedstawione jest zdjęcie satelitarne wybrzeża. Przy każdym kolejnym powiększeniu widzimy podobne fragmenty: małe zatoki, jakieś półwyspy. W każdym przypadku linia brzegowa jest poszarpana.

Na rysunku 4 prezentujemy tzw. Punkt Zabriskiego – wierzchołki gór w Parku Narodowym Doliny Śmierci w Kalifornii jako przykład fraktalnego modelu terenu.

Bardzo dobrą ilustracją fraktala są kalafioiry i brokuły, w szczególności brokuły włoskie (Romanesco broccoli, patrz rysunek 5).



Rys. 5. Brokuły włoskie



Rys. 6. Spirala Fibonacciego (logarytmiczna) na brokule włoskim. Jest to tzw. Złota spirala. Współczynnik b jest złotą liczbą

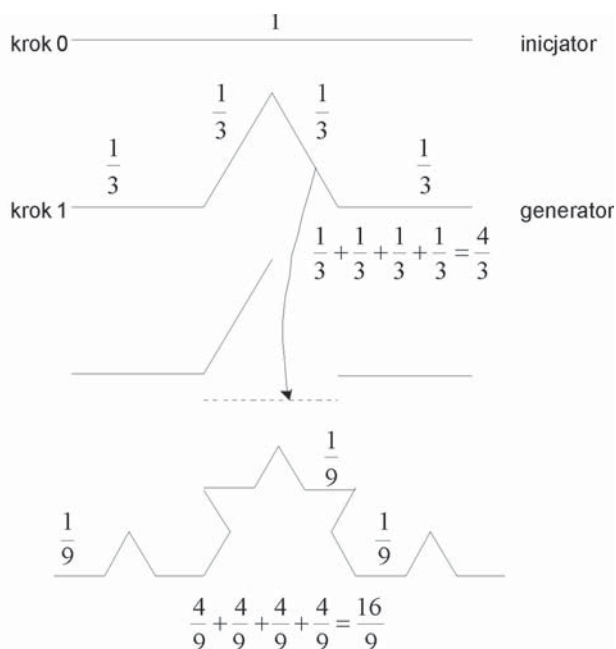
Budowa poszczególnych różyczek brokołu włoskiego wykazuje duże podobieństwo do złotej spirali Fibonacciego, szczególnego przypadku spirali logarytmicznej. Rozpoznamy ją na rysunku 6.

Cechą wspólną fraktali wymienionych powyżej jest przybliżona metoda wyznaczania ich wymiaru. Polega ona na zliczaniu kwadratów bądź sześcianów obejmujących swoją powierzchnią lub objętością wybrane fragmentu zbiorów. W ten sposób określa się fraktalny wymiar linii brzegowej, chmur, opadów. Znamy metodę cyrklową (podziałkową), pudełkową (kostkową) i inne.

Przejdziemy teraz do bardziej złożonych zbiorów fraktalnych, budowanych nie przez naturę, lecz człowieka.

2. PŁATEK ŚNIEGU JAKO FRAKTAL I INNE CIEKAWY ZBIORY

Przykładów fraktali konstruowanych komputerowo na podstawie niezbyt złożonych algorytmów matematycznych jest nieskończenie wiele. Jednym z nich jest krzywa Kocha – geometryczne przybliżenie 1/3 płatka śniegu. Krzywa Kocha jest przypadkiem funkcji ciągłej zmiennej rzeczywistej, nieróżniczkowalnej w każdym punkcie, tzw. funkcji Weierstrassa.



Rys. 7. Określenie długości krzywej Kocha

Długość L krzywej Kocha jest nieskończona (rys. 9):

$$L = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty \quad (1)$$

Płatek śniegu jest złożeniem trzech krzywych Kocha. Jego obwód również ma długość nieskończoną, pomimo tego, że te trzy krzywe ograniczają obszar o skończonym polu³ P (rys. 8):

$$P = \frac{2\sqrt{3}}{5} \quad (2)$$

Krzywa ta nie zawiera żadnych odcinków – w każdym swoim

³ Wzór ogólny ma postać $P = \frac{2\sqrt{3}}{5} a^2$, gdzie a – długość inicjatora.

punkcie ma *zagięcie*, a więc w żadnym nie ma stycznej. W efekcie nie jest różniczkowalna.

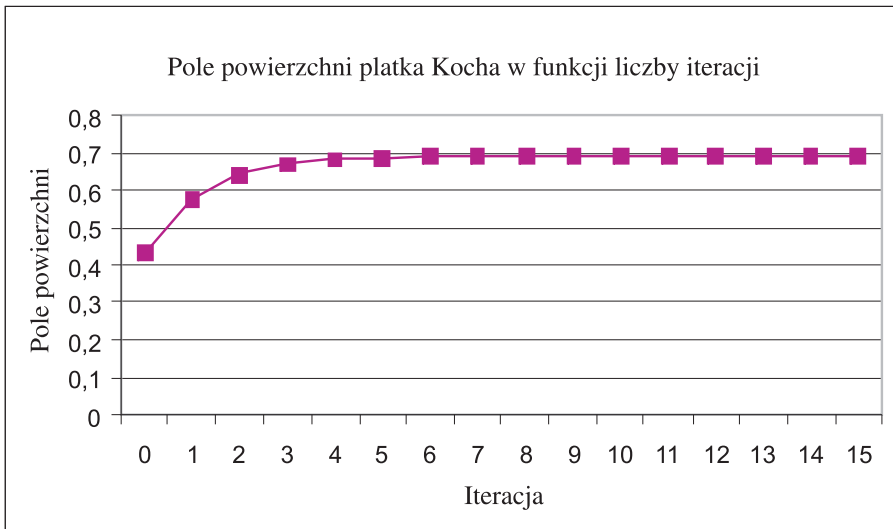
Tak więc, wymiar fraktalny D_s krzywej Kocha jest większy, niż jego wymiar topologiczny, który wynosi jeden, ale mniejszy niż jego wymiar euklidesowy wynoszący dwa. Skoro D_s krzywej Kocha jest większy niż dla linii, ale mniejszy niż dla powierzchni, można w przybliżeniu powiedzieć, że krzywa Kocha to więcej niż linia, ale nie całkiem powierzchnia. Jaki jest zatem jej wymiar? Odpowiedź:

$$D_s = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2619\dots \quad (3)$$

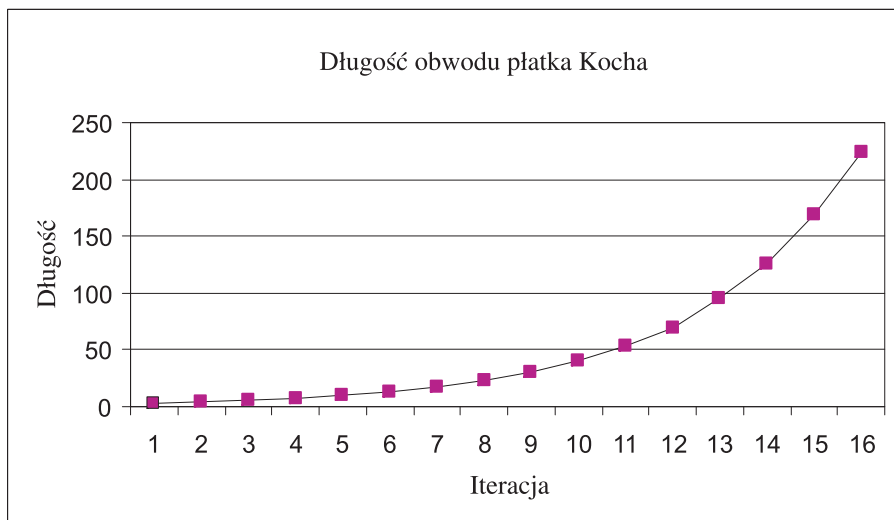
Skąd taka dziwna wartość? Otóż, zgodnie z definicją wymiaru fraktalnego:

$$N = s^{D_s} \text{ skąd } D_s = -\frac{\ln N}{\ln \frac{1}{s}} = \frac{\ln N}{\ln s} \quad (4)$$

gdzie: N – liczba elementów powtarzających się, s – skala podziału zbioru. A więc, szukamy takiej skali, w której zbiór wyjściowy, czyli inicjator, powtarza się. Najlepiej ograniczyć się do pierwszego kroku (patrz rys. 7). Inicjator został podzielony na trzy elementy, czyli $s = 3$. Natomiast powieliliśmy go $N = 4$ razy. Stąd wynik (3). Analizując kolejne etapy konstrukcji, widzimy, że zawsze fragment krzywej Kocha zawiera w sobie 4 ($N = 4$) kopie, każda długości $1/3$ ($s = 3$) odcinka z poprzedniego kroku konstrukcji. Widzimy, że rzeczywiście wymiar krzywej Kocha zawiera się w przedziale $1 < D_s < 2$.



Rys. 8. Zależność pola powierzchni placka Kocha od numeru iteracji



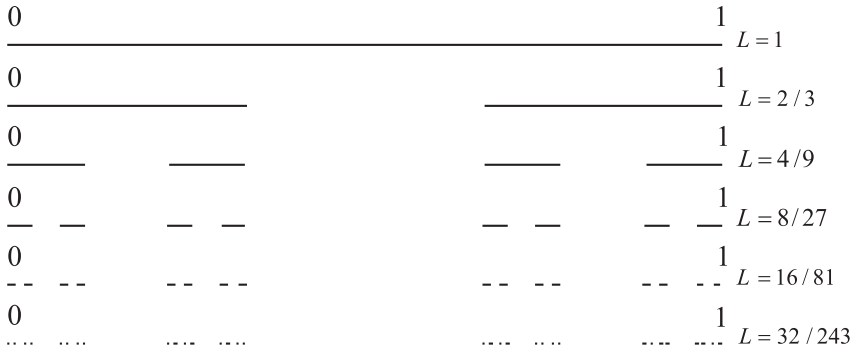
Rys. 9. Zależność długości obwodu płata Kocha od numeru iteracji

Wymiar fraktalny obiektu charakteryzuje stopień jego nieregularności – złożoność struktury oraz określa stopień wypełnienia dostępnej przestrzeni przez dany obiekt. Wiemy, że wymiar fraktalny linii brzegowej Norwegii wynosi 1.52, Wielkiej Brytanii 1.36, a granic Polski tylko 1.14.

Wymiar fraktalny jest z reguły dużo wyższy niż wymiar topologiczny obiektu i wyrażony jest najczęściej liczbą ułamkową. Chociaż znany jest obiekt, którego wymiar fraktalny jest liczbą całkowitą, równą 2. Jest to piramida (gąbka) Sierpińskiego.

Przejdźmy do kolejnego przykładu. Pamiętamy z wstępu, że wymiar topologiczny punktu jest równy zero. Takim fraktalem punktowym jest graniczna postać zbioru Cantora. Konstrukcja zbioru Cantora jest bardzo prosta. Odcinek dzielimy na trzy równe części i usuwamy środkową (rysunek 10). Postępujemy tak z każdym z pozostałych dwóch, czterech itd. odcinków. Wraz z kolejnymi krokami liczba odcinków rośnie, a długość każdego dąży do zera. W efekcie długość zbioru Cantora jest równa zero. Otrzymaliśmy bowiem ciąg geometryczny, którego suma jest równa:

$$\begin{aligned}
 L &= 1 - \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{27} - 8 \cdot \frac{1}{81} - \dots = 1 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots \right) = \\
 &= 1 - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 0
 \end{aligned} \tag{5}$$



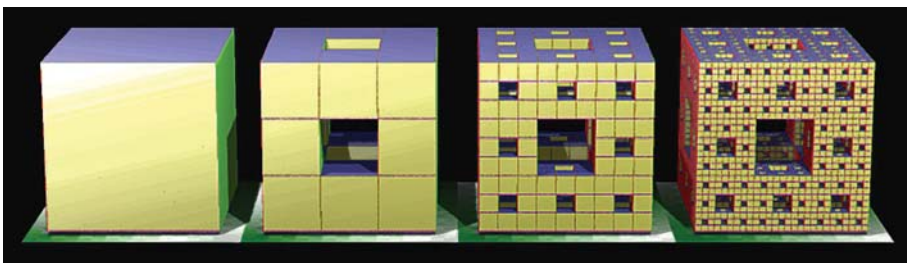
Rys. 10. Zbiór Cantora

Jednak wymiar fraktalny zbioru Cantora jest różny od zera. Na podstawie pierwszego kroku jego konstrukcji widzimy, że liczba elementów powtarzających się $N = 2$, a odcinek wyjściowy podzieliliśmy na 3 mniejsze. Stąd $s = 3$. Zatem

$$D_s = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309... \quad (6)$$



Rys. 11. Dywan Sierpińskiego. Jego pole powierzchni jest równe 0 [11]



Rys. 12. Kostka Mengera [12]

Zbiór Cantora jest zbiorem wyjściowym do konstrukcji innych fraktali: dywanu Sierpińskiego $\left(D_s = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1.8928... \right)$ – rysunek 11, czy też kostki (gąbki) Mengera

$\left(D_s = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2.7268... \right)$ – rysunek 12.



Rys. 13. Trójkąt Sierpińskiego. Wymiar fraktalny $D_s = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.58496\dots$ [10]

3. CHAOS DETERMINISTYCZNY W MATEMATYCE I FIZYCE – KILKA PRZYKŁADÓW

Chaos deterministyczny – to własność równań lub układów równań, polegająca na dużej wrażliwości rozwiązań na dowolnie małe zaburzenie parametrów. Dotyczy to zwykle nieliniowych równań różniczkowych i różnicowych, opisujących układy dynamiczne (definicja na podstawie: Wikipedia.org). Jeżeli równania opisują zmiany układu w czasie, to niewielkie zaburzenie warunków początkowych powoduje rosnące wykładniczo z czasem zmiany w zachowaniu układu dynamicznego. Zagadnienie to często jest łączone ze stabilnością układów oraz z definicją poprawnego sformułowania zagadnienia granicznego. Co to znaczy duża wrażliwość na dowolnie małe zaburzenie parametrów? Otóż, mamy układ równań liniowych [11]:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix}, \quad \text{Rozw. } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oraz ten sam układ z minimalnie zmienioną prawą stroną \mathbf{b} :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0002 \end{bmatrix}, \quad \text{Rozw. } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Otrzymaliśmy dwie pary rozwiązań, zupełnie innych. I chociaż powyższe przykłady dotyczą w ogólności uwarunkowania macierzy, to bardzo dobrze oddają istotę omawianego zjawiska. Małe zmiany w warunkach początkowych (w tym przypadku w prawych stronach) wywołały bardzo duże zmiany w rozwiązaniu układu.

Inny przykład. Poddamy iteracyjnemu przekształceniu proste równanie kwadratowe, znane w literaturze jako funkcja logistyczna:

$$p_{i+1} = p_i + r \cdot p_i \cdot (1 - p_i), \quad p_0 = 0.01, \quad r = 3.0 \quad (7)$$

W Tabeli 1 zamieszczono kolejne wartości p_{i+1} ($i = 0,1,\dots$) tego przekształcenia wyznaczone na dwóch kalkulatorach osobistych (za [8]).

Na stronie internetowej [23] zagadnienie to jest rozszerzone o arkusz kalkulacyjny Excel oraz trzeci kalkulator.

Nie należy się zatem dziwić, że rozwiązując to samo (nawet bardzo proste) zadanie na różnych kalkulatorach, czasami otrzymujemy różne wyniki. Przy rozwiązywaniu zagadnień bardziej złożonych posługujemy się komputerami. Jak się okazuje one też generują błędy zaokrąglania.

W tabeli 2 zamieszczono rozwiązanie tego samego problemu z wykorzystaniem 3 kompilatorów: Matlab, C++ oraz Compaq Visual Fortran.

Tab. 1. Obliczenia rekurencyjne na dwóch kalkulatorach (patrz [8], s.84)

| Iteracja | CASIO fx-7000G | HP 28S |
|----------|---------------------|-----------------------|
| 1 | <u>0.0397</u> | <u>0.0397</u> |
| 2 | <u>0.15407173</u> | <u>0.15407173</u> |
| 3 | <u>0.5450726260</u> | <u>0.545072626044</u> |
| 4 | <u>1.288978001</u> | <u>1.28897800119</u> |
| 5 | <u>0.1715191421</u> | <u>0.171519142100</u> |
| 6 | <u>0.5978201201</u> | <u>0.597820120080</u> |
| 10 | <u>0.7229143012</u> | <u>0.722914301711</u> |
| 15 | <u>1.270261775</u> | <u>1.27026178116</u> |
| 20 | <u>0.5965292447</u> | <u>0.596528770927</u> |
| 25 | <u>1.315587846</u> | <u>1.31558435183</u> |
| 30 | <u>0.3742092321</u> | <u>0.374647695060</u> |
| 50 | <u>0.0036616295</u> | <u>0.225758993390</u> |

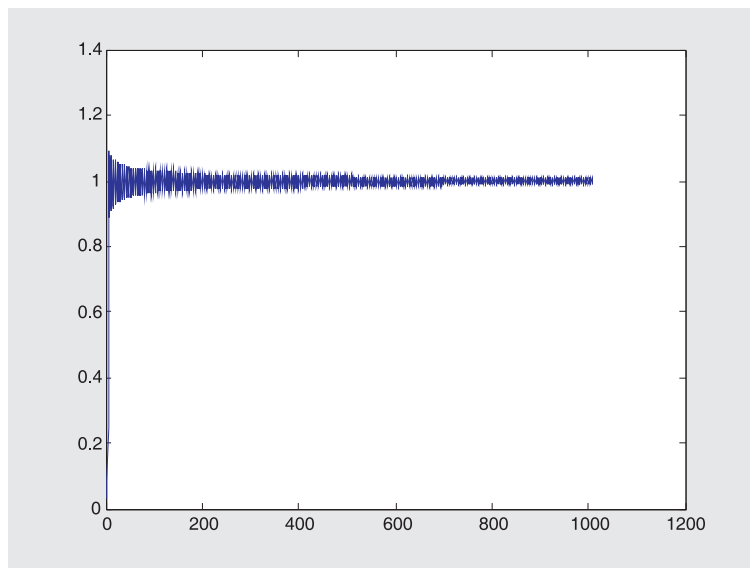
Tab. 2. Obliczenia rekurencyjne dla $p = 0.01$, $r = 3.0$: ten sam komputer, różne kompilatory (obliczenia własne)

| Iteracja | Matlab | C++ | CVFortran |
|----------|--------------------|--------------------|----------------|
| 1 | 0.0397 | 0.0397 | 0.039699999119 |
| 2 | 0.15407173 | 0.15407173 | 0.154071726687 |
| 3 | 0.5450726260444213 | 0.5450726260444213 | 0.545072615855 |
| 4 | 1.2889780011888006 | 1.2889780011888006 | 1.288977993755 |
| 5 | 0.1715191421091756 | 0.1715191421091756 | 0.171519169865 |
| 10 | 0.722914301179573 | 0.7229143011795721 | 0.722912979476 |
| 50 | 1.31399674660676 | 1.3143395878296971 | 0.790536917691 |
| 55 | 0.581591926507394 | 0.5361217643525467 | 0.030301775607 |
| 57 | 0.085438156362504 | 0.1966620808234614 | |
| 60 | 1.05273968653737 | 0.0001875776026813 | |
| 100 | 0.393788595636378 | 0.9050692605962565 | |

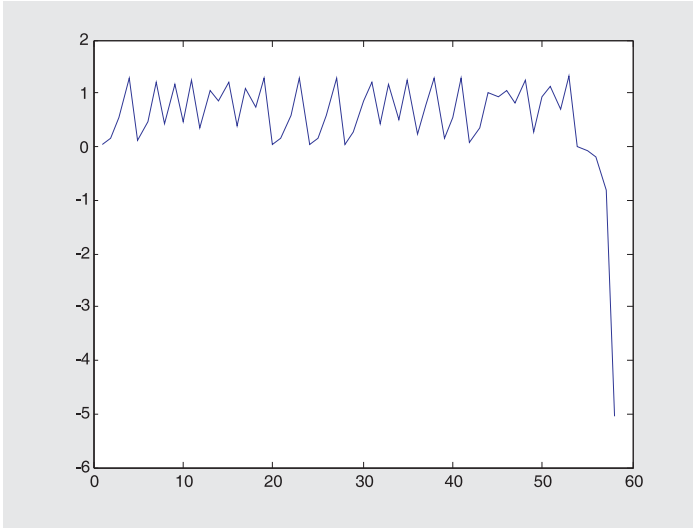
Rozwiązania te przedstawiają tzw. przebieg nieuporządkowany. Przebiegi stabilny i niestabilny prezentują rysunki 14 i 15 opracowane na podstawie danych z tabeli 3.

Tab. 3. Obliczenia rekurencyjne dla $p=0.01$, $r=2.0$ i $r=3.02$ ten sam komputer, różne kompi-latory – obliczenia własne

| Iteracja | $r = 2.0$ | | $r = 3.02$ | |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| | Matlab | CVFortran | Matlab | CVFortran |
| ↓ | | | | |
| 1 | <u>0.029800000000</u> | <u>0.029799999338</u> | <u>0.039898000000</u> | <u>0.039897998926</u> |
| 10 | <u>0.908077060698</u> | <u>0.908077065063</u> | <u>0.479532933630</u> | <u>0.479536779228</u> |
| 46 | <u>0.950091385236</u> | <u>0.950091385917</u> | 1.073999017080 | 1.337735917606 |
| 50 | <u>0.951929397831</u> | <u>0.951929398440</u> | 0.931471083910 | -2.600728081154 |
| 53 | <u>1.042764334448</u> | <u>1.042764333979</u> | 1.333682614730 | $\pm\infty$ |
| 54 | <u>0.953578088951</u> | <u>0.953578089499</u> | -0.010298025616 | |
| 75 | <u>1.036922272850</u> | <u>1.036922272553</u> | Przebieg niestabilny | Przebieg niestabilny |
| 90 | <u>0.963379653811</u> | <u>0.963379654080</u> | | |
| 100 | <u>0.965162892534</u> | <u>0.965162892766</u> | | |
| 120 | <u>0.968066877593</u> | <u>0.968066877772</u> | | |
| 130 | <u>0.969271347780</u> | <u>0.969271347940</u> | | |
| 140 | <u>0.970349435408</u> | <u>0.970349435551</u> | | |
| 150 | <u>0.971321800385</u> | <u>0.971321800514</u> | | |
| 155 | <u>1.026711612425</u> | <u>1.026711612315</u> | | |
| 160 | <u>0.972204662171</u> | <u>0.972204662289</u> | | |
| 1000 | <u>0.988769045891</u> | <u>0.988769045899</u> | | |



Rys. 14. Przebieg stabilny dla $p = 0.01$ i $r = 2.0$ (Matlab, Compaq Visual Fortran) – obliczenia własne



Rys. 15. Przebieg niestabilny dla $p = 0.01$ i $r = 3.02$ (Matlab) – obliczenia własne

Zauważmy, że równania

$$p_{i+1} = p_i + r \cdot p_i \cdot (1 - p_i) \quad (8)$$

i

$$p_{i+1} = (1 + r) p_i - r \cdot p_i^2 \quad (9)$$

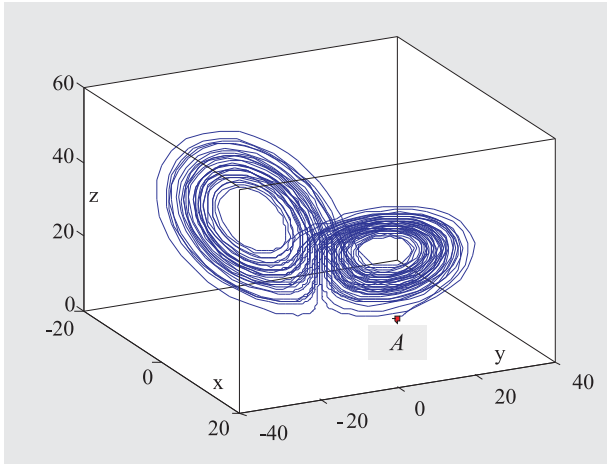
z matematycznego punktu widzenia są równoważne. Ale czy na pewno? Poniżej (tabela 4) przytaczamy ciąg kolejnych wartości iteracyjnych p_{i+1} wyznaczonych zgodnie z (8) i (9):

Tab. 4. Funkcja logistyczna. Obliczenia własne wykonane na platformie Compaq Visual Fortran

| Iteracja | $p_{i+1} = p_i + r \cdot p_i \cdot (1 - p_i)$ | $p_{i+1} = (1 + r) p_i - r \cdot p_i^2$ |
|----------|---|---|
| 1 | <u>0.039699999119</u> | <u>0.039699999119</u> |
| 2 | <u>0.154071726687</u> | <u>0.154071726687</u> |
| 10 | <u>0.722912979476</u> | <u>0.722912979476</u> |
| 14 | <u>0.521649906617</u> | <u>0.521649906616</u> |
| 20 | <u>0.597880187132</u> | <u>0.597880187171</u> |
| 27 | <u>0.141718403381</u> | <u>0.141718400296</u> |
| 35 | <u>0.048581975466</u> | <u>0.048581975466</u> |
| 45 | <u>1.199809837084</u> | <u>1.200596470286</u> |
| 58 | <u>1.167729362478</u> | <u>0.031189917534</u> |

Okazuje się, że szybciej lub wolniej, niezależnie od precyzji obliczeń, języka programowania oraz typu maszyny obliczeniowej pojawiają się różnice w tego typu ciągach wartości. Wniosek jest prosty – komputery też nie są wolne od chaosu.

Jednym z pierwszych, który uświadomił sobie pod koniec lat 50-tych wagę chaosu w układach deterministycznych był amerykański meteorolog i matematyk, **Edward Norton Lorenz** (1917 – 2008). Na przykładzie matematycznych modeli używanych w długoterminowym prognozowaniu pogody Lorenz uzasadnił zjawisko niemożności przewidywania zachowania się układów deterministycznych. Dzisiaj wiemy, że w czasach współczesnych nie będziemy dysponować wiarygodną prognozą pogody na dłużej niż 72 godziny. Dlatego tak ważny jest rozwijający się coraz prężniej dział prognoz pogody wykorzystujący dane historyczne. Szczególnie dużo się o tym mówiło podczas zimy 2009/2010.



Rys. 16. Dziwny atraktor Lorenza jest fraktalem

Lorenz analizował układ 12 równań różniczkowych zwyczajnych. Prowadził obliczenia na liczbach z dokładnością do 6 miejsca po przecinku (0.506127) i ten sam model uruchamiał następnie z tymi samymi danymi zapisanymi z dokładnością do 3 miejsca po przecinku (0.506). Otrzymywał zupełnie inne wyniki. Ta niewielka różnica 0.000127 w czasie symulacji pogody na dwa miesiące stała się tak wielka jak same dane początkowe. Okazało się, że jeżeli

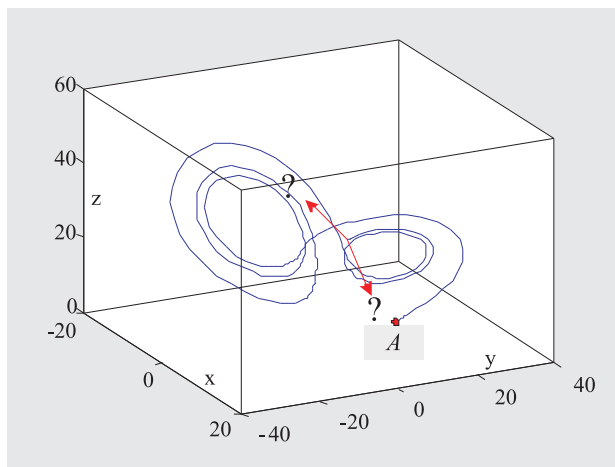
sama atmosfera zachowuje się w podobny sposób, to nie jesteśmy w stanie przewidzieć pogody na najbliższe dwa miesiące. Te małe różnice powiększają się do znacznych wartości (patrz [8], [11], [23]).

Poniżej przedstawiamy układ równań dynamiki atmosfery w przybliżeniu barotropowym, często utożsamiany z modelem płytkiej wody:

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} - 2\omega v \sin \varphi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
 \frac{dv}{dt} + 2\omega u \sin \varphi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
 \frac{dw}{dt} - 2\omega u \cos \varphi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial w}{\partial z} \right) - g
 \end{aligned} \tag{10}$$

Pomimo tego, że układ (10) jest jednym z najprostszych opisów dynamiki atmosfery, to i tak przy dostatecznie długich obliczeniach wyniki końcowe niewiele mają wspólnego z rzeczywistością.

Wróćmy do analizy Lorenza. Na rysunku 16 przedstawiamy dziwny atraktor, nazywany jego nazwiskiem, w postaci skrzydeł motyla.



Rys. 17. Atraktor Lorenza. Pierwsze iteracje

Jeżeli posługiwaliśmy się zupełnie poprawnym modelem pogody, to nie możemy przy jego pomocy przygotowywać prognoz na dłuższy czas. Zjawisko to nosi nazwę

CZULEJ ZALEŻNOŚCI OD WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH

i jest jedną z podstawowych własności chaosu deterministycznego.

Problem ten jest szczegółowo opisany przez samego Lorenza (patrz [2]). Ze względu na wagę poruszanego zagadnienia na wielu stronach internetowych można znaleźć współczesne analizy osiągnięć Lorenza oraz prace dotyczące teorii chaosu.

Skoro tak jest, to sławne pytanie Edwarda Lorenza postawione w 1972 roku:

Can the flap of the butterfly wing stir up a tornado in Texas?

lub jego inna obieguwa wersja:

Does the flap of the butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?

pozostaje stale aktualne, chociaż odpowiedź jest znana – praktycznie **NIE**, w teorii **TAK**.

Chcąc powiedzieć dokąd podąży punkt początkowy A (rysunek 17) po długim czasie, musimy go określić z nieskończoną dokładnością podając całkowity rozkład dziesiętny, wszystkie cyfry aż do nieskończoności! Z analizy rysunku 17 wynika, że nawet nie wiemy na którą orbitę skieruje się punkt A już po kilku pierwszych iteracjach. Pamiętamy, że komputery mogą prowadzić obliczenia jedynie do określonej liczby miejsc dziesiętnych ([8], [11]).

Literatura

1. Kudrewicz J.: *Fraktale i chaos*. WNT, Warszawa 2004
2. Lorenz E. N., 1963: *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of Atmospheric Sciences, Vol. 20: str. 130—141
3. Lovejoy S., Marsan D., Schertzer D., 1996: *Causal space-time multifractal processes: Predictability and forecasting of rain fields*. Journal of Geophysical Research, vol. 101, D21.
4. Lovejoy, S., Schertzer D., 1995: *Multifractals and Rain. New Uncertainty Concepts in Hydrology and Hydrological Modelling*, Ed. A. W. Kundzewicz, 62-103, Cambridge Press.
5. Lovejoy S., Schertzer D., Tsonis A.A.: *Functional Box-Counting and Multiple Elliptical Dimensions in Rain.*, Science, 1987: Vol. 235. no. 4792, pp. 1036 – 1038.
6. Mandelbrot B. B.: *The Fractal Geometry of Nature.*, W. H. Freeman and Co., New York 1982.
7. Ott E.: *Chaos w układach dynamicznych.*, WNT, Warszawa 1997
8. Peitgen H. – O., Jurgens H., Saupe D.: *Granice chaosu. Fraktale. Cz. 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995
9. Peitgen H. – O., Jurgens H., Saupe D.: *Granice chaosu. Fraktale. Cz. 2*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996
10. Schuster H. G.: *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie.*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993
11. Stewart I.: *Czy Bóg gra w kości. Nowa matematyka chaosu.*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.
12. Strang G. W.: *Linear Algebra and its Application.*, Academic Press, New York 1976.
13. http://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_triangle#Analogues_in_higher_dimensions
14. <http://mathworld.wolfram.com/SierpinskiCarpet.html>
15. http://en.wikipedia.org/wiki/Universal_curve
16. <http://www.mini.pw.edu.pl/MiNIwyklady/index.html>
17. <http://www.mini.pw.edu.pl/MiNIwyklady/minkowski/index.html>
18. <http://www.mini.pw.edu.pl/MiNIwyklady/fraktale/Platek/platek.html>
19. http://www.portalwiedzy.pan.pl/images/stories/pliki/publikacje/acad_wer_full/03_06/16-18_macek.pdf
20. <http://www-users.mat.uni.torun.pl/~philip/festiwal.pdf>
21. <http://tages.fm.interia.pl/fraktale.html>
22. <http://projekt-fraktale.republika.pl/wymiary.htm>
23. <http://berith.webpark.pl/stro/nauk/nau1.html>