Andrzej SZAŁAS[1]

O PEWNYCH ZASTOSOWANIACH ELIMINACJI KWANTYFIKATORÓW W ROBOTYCE

Streszczenie

Niniejszy wykład zarysowuje w popularyzującym ujęciu wybrane zagadnieniom efektywnego wnioskowania prowadzonego w warunkach, w których mamy do czynienia z wiedzą niepełną, niepewną i silnie zaszumioną, gdy trzeba poradzić sobie ze złej jakości danymi, w tym bieżącymi odczytami pomiarów, obrazami z kamer itp. Wykład jest oparty o rozwiązania opracowane dla potrzeb bezzałogowych helikopterów (rzeczywiście wykonujących loty bezzałogowe w kontrolowanych warunkach poligonowych). W szczególności naszkicowane będą dość subtelne formy wnioskowania wykorzystujące niebanalne techniki logiczne, drastycznie obniżające złożoność wnioskowania w dużej klasie teorii spotykanych w praktyce.

The current lecture provides a popular overview of selected topics concerning efficient reasoning dealing with incomplete and noisy data of bad quality, collected from sensors and video cameras. The lecture is based on solutions worked out for autonomous aerial vehicles and test flights over a rescure training area in Revinge (Sweden).
In particular we sketch rather subtle forms of reasoning based on nontrivial logical methods substantially deceasing the complexity of reasoning in a large class of theories applied in practice.

1. WSTĘP

Współczesna robotyka coraz częściej korzysta z rozwiązań oferowanych przez sztuczną inteligencję. Od robotów oczekuje się „inteligentnego” zachowania, wymagającego wnioskowania przeprowadzanego na podstawie zgromadzonej wiedzy. Opracowanie właściwych metod wnioskowania okazuje się niemałym wyzwaniem zwłaszcza, gdy mamy do czynienia z wiedzą niepełną, niepewną i silnie zaszumioną. Wyobraźmy sobie bezzałogowy pojazd wysłany dla rozpoznania sytuacji w płonącym lesie. Możemy złożyć, że pojazd będzie dysponował sekwencjami obrazów ze swojej kamery, odczytami rozmaitych sensorów i - gdy łączność funkcjonuje -

---

[1] Prof. dr hab. Andrzej Szałas jest profesorem Wyższej Szkoły Informatyki i Ekonomii TWP w Olsztynie oraz profesorem Wydziału Informatycznego Uniwersytetu w Linköping w Szwecji..

wiedzą operatora. Inteligentne zachowanie takiego pojazdu jest jednak szczególnie cenne, gdy ta właśnie łączność zawodzi i pojazd staje się całkowicie autonomiczny, zdany na jedynie na swoje możliwości. Wiedza zaszyta w bazie danych pojazdu musi być konfrontowana z rzeczywistością postrzeganą bardzo nieprecyzyjnie, na dodatek konfrontacja ta musi być wykonywana w czasie rzeczywistym. Do skomplikowanych problemów reprezentacji wiedzy i wnioskowania dochodzi więc szalenie istotny czynnik, jakim jest krótki czas przeznaczony na to wnioskowanie. Trzeba poradzić sobie ze złej jakości obrazami i odczytami pomiarów, obarczonymi znacznymi błędami, interpretując je i syntetyzując z nich wiedzę o otaczającej rzeczywistości.

Niniejsza notatka zarysowuje w popularyzującym ujęciu główne wątki, przedstawione na wykładzie, poświęconym zagadnieniom efektywnego wnioskowania prowadzonego w warunkach niepełnej, niepewnej i zaszumionej informacji. Wykład jest oparty o efektywne rozwiązanie opracowane dla potrzeb bezzałogowych helikopterów[2] w ramach ostatnio zakończonego szwedzkiego projektu WITAS[3], który był największym tego typu projektem cywilnym w Europie[4]. W szczególności naszkicujemy dość subtelne formy wnioskowania wykorzystujące niebanalne techniki logiczne, drastycznie obniżające złożoność wnioskowania w dużej klasie teorii spotykanych w praktyce.

2. POJĘCIA DOKŁADNE A POJĘCIA PRZYBLIŻONE

Pojęcia dokładne występują głównie w wyidealizowanych językach, na przykład w naukach ścisłych. Tradycyjna arytmetyka, czy analiza matematyczna są świetnymi przykładami rzeczywistości operującej na nietrywialnych dokładnych pojęciach. Życie codzienne i odzwierciedlający je język naturalny są pełne pojęć niedokładnych, przybliżonych. Zapewne zoologia zna ścisłą definicję psa, jednak w życiu codziennym taką definicją się nie posługujemy. Praktyczne wnioskowanie wymaga prostych definicji, choćby nie ujmowały one całej złożoności danego pojęcia. Wystarczy by ujmowały je w dostatecznie dużej liczbie typowych przypadków i nie wymagały dłuższych obserwacji, czy drobiazgowych badań. Posługujemy się zestawem reguł klasyfikujących dany obiekt jako psa lub nie psa. Czasem możemy mieć wątpliwości. Dzieci uczymy podając im warunki wystarczające i konieczne na dane pojęcie.

[2] Rzeczywiście wykonujących loty bezzałogowe w kontrolowanych warunkach poligonowych.
[3] WITAS to akronim od Wallenberg Laboratory for Research on Information Technology and Autonomous Systems.
[4] Czytelników zainteresownych projektem i jego wynikami odsyłam na strony internetowe http://www.ida.liu.se/~patdo/auttek/.

Najprostsze warunki wystarczające to wskazanie przykładów ”jeśli dany obiekt to nasz Gacek, to jest to pies”, a najprostsze warunki konieczne określają najbardziej oczywiste cechy, typu ”jeśli obiekt jest psem, to ma sierść i cztery łapy”, choćby prowadziło to w pewnych przypadkach do błędnych wniosków, wymagających późniejszych korekt. Z punktu widzenia czasu poświęconego na klasyfikację musimy jednak zadowalać się takimi przybliżeniami, a czasem po prostu odpowiadać ”nie wiem”, zamiast poświęcić tygodnie czasu na zbadanie, czy dany obiekt widziany nocą był kometą, czy snopem iskier z przejeżdżającego w pobliżu pociągu (chyba że problem ten ma dla nas z jakiegoś powodu zasadnicze znaczenie). Podobnie czasem lepiej nie wdawać się w precyzyjne odróżnianie drzewa od krzewu, bo na co dzień proste kryteria pozwalają nam na właściwą ocenę. Jeśli zawiodą raz na rok lub rzadziej - ponosimy pewnie jakieś koszty, niekoniecznie materialne, ale bilans jest zwykle bardzo dodatni, przemawiający na korzyść prostych, efektywnych, ale przybliżonych definicji.

A teraz podajmy definicję pojęcia dokładnego i jego przybliżenia.

DEFINICJA 2.1 Niech U będzie zbiorem obiektów. Przez *pojęcie dokładne* określone na U rozumiemy dowolny podzbiór U. Przez *przybliżenie (aproksymację) pojęcia* $A \subseteq U$ rozumiemy parę zbiorów D, G taką, że $D \subseteq A \subseteq G \subseteq U$. Zbór Δ nazywamy dolną aproksymacją pojęcia A, zaś G - jego górną aproksymacją.

W praktyce zamiast dokładnego pojęcia A mamy często do czynienia z jego aproksymacją. D rozumiemy jako zbiór obiektów z U na pewno należących do pojęcia, różnica $(G - D)$ określa elementy, których dana aproksymacja nie pozwala sklasyfikować, zaś $(-G)$ określa elementy na pewno nie należące do pojęcia A .

Warto zauważyć, że jesteśmy tu niezbyt daleko od pojęcia zbiorów przybliżonych wprowadzonego przez Pawlaka (por. np. [10]) i intensywnie rozwijanego w wielu ośrodkach na całym świecie. Istnieje wiele innych podejść, jak choćby zbiory rozmyte, czy podejścia probabilistyczne.

3. ILE JEST WARTOŚCI LOGICZNYCH?

Zwykle w szkole uczymy się, że logika operuje dwoma wartościami logicznymi - PRAWDA i FAŁSZ. Jaka jest więc wartość logiczna zdania ”w chwili obecnej w Oslo pada deszcz”? Możemy odpowiedzieć, że albo PRAWDA, albo FAŁSZ, tyle że nie umiemy powiedzieć jak jest w rzeczywistości. Jako ludzie potrafimy się poruszać w warunkach niewiedzy i starać się ją uzupełniać lub nawet na jej podstawie wnioskować. Na przykład z niewiedzy o posiadaniu rodzeństwa jesteśmy skłonni wnioskować, że nie mamy rodzeństwa, bo gdybyśmy je mieli - wiedzielibyśmy o tym.

Inteligentnie reagujący robot, obliczając wartości logiczne formuły musi uzyskać pewną wartość logiczną dla dalszego wnioskowania. Jeśli nie może stwierdzić czy dana formuła ma wartość PRAWDA, czy FAŁSZ, musi przyjąć inną, równoprawną wartość logiczną, np. NIEZNANA i prowadzić na jej podstawie dalsze wnioskowanie. Pierwszą współczesną logikę trójwartościową, a więc operującą na trzech, nie dwóch wartościach logicznych, wprowadził w 1917 roku polski logik Jan Łukasiewicz.

Skoro dwie wartości logiczne nie wystarczają, powstaje pytanie czy możemy się ograniczyć do trzech takich wartości. Wszystko zależy od konkretnych zastosowań. Jeśli mamy do czynienia ze sprzeczną informacją[5], logika klasyczna staje się bezradna, bo z wartości logicznej FAŁSZ, reprezentującej sprzeczność[6], można wywnioskować każdą inną formułę. Zamiast tego można jednak wprowadzić czwartą wartość logiczną SPRZECZNA i odpowiedni dla niej rachunek logiczny (por. np. [2]) nie prowadzący od sprzeczności do fałszu. Istnieją logiki wielowartościowe, gdzie liczba wartości logicznych jest dowolna, np. nieskończona, przyjmująca nawet continuum wartości (jak logiki oparte o zbiory rozmyte Zadeha, operujące *stopniem przynależności* do zbioru).

W niniejszym wykładzie wystarczą nam jednak trzy wartości logiczne - PRAWDA, FAŁSZ oraz NIEZNANA.

4. WNIOSKOWANIE MONOTONICZNE, CZY NIE?

Typowe logiki modelują wnioskowanie monotoniczne, zakładając że *monotoniczność* to taka cecha logiki, która mówi że zwiększenie liczby założeń nie może prowadzić do zmniejszenia liczby wniosków. Jeśli mamy bowiem dowód formuły A ze zbioru formuł F, to dowód A ze zbioru formuł $F \cup G$ nie ulega zmianie. Po prostu powtarzamy ten sam dowód, ignorując nowe fakty ze zbioru G. Czy rozumowanie prowadzone przez ludzi, a więc takie, które przyjmujemy za inteligentne, jest monotoniczne?

Za chwilę spróbujemy pokazać, że tak nie jest. Co więcej – korzystanie w życiu codziennym wyłącznie z technik monotonicznych prowadziłoby do praktycznej niemożliwości wykonania jakiejkolwiek dobrze uzasadnionej akcji.

Często bardzo skuteczne jest rozumowanie oparte o reguły lub stwierdzenia, których prawdziwości nie da się wykazać[7]. W takich przypadkach przyjęte przekonania mogą podlegać rewizji w świetle nowych faktów, co może oznaczać redukcję wnio-

[5] Przy różnych źródłach informacji może się to z łatwością wydarzyć – z pewnością każdemu zdarzyło się słyszeć sprzeczne tezy, wygłaszane na przykład przez polityków konkurujących o większy wpływ na życie publiczne.

[6] Bowiem $A \wedge \neg A$ przyjmuje w logice klasycznej wartość FAŁSZ.

[7] Bywa, że wręcz nie są prawdziwe, jak na przykład powszechnie uznawane stwierdzenie "jutro też będzie dzień", co do którego jesteśmy pewni, że kiedyś zostanie sfalsyfikowane. Jednak spokojnie postępujemy tak, jakby było prawdziwe.

sków. Na przykład często w zbiorze naszych przekonań tkwi stwierdzenie, że "samochód znajduje się tam, gdzie go ostatnio zaparkowaliśmy". Oczywiście stwierdzenie to nie jest zawsze prawdziwe, ale postępujemy bardzo skutecznie, postępując tak jakby było prawdziwe i chcąc pojechać gdzie swoim samochodem nie rozpoczynamy od telefonu na policję, czy bieganiu po rozmaitych mniej lub bardziej losowo wybranych parkingach, tylko jednak idziemy w miejsce ostatniego parkowania samochodu. Jeśli pojawi się nowy fakt, jak np. „samochód został skradziony", unieważnia on nasze poprzednio przyjęte przekonanie. Tak więc nowe fakty mogą unieważniać fakty przyjęte za aksjomaty, redukując przy okazji zbiór wniosków. Jest to oczywista niemonotoniczność. Rozumowania niemonotoniczne zostały zauważone jako dziedzina ponad trzydzieści lat temu, a od lat osiemdziesiątych do połowy lat dziewięćdziesiątych minionego stulecia były bardzo intensywnie badane. Jeśli bowiem mamy wyposażyć autonomiczne systemy w skuteczne metody działania, możemy imitować ludzkie rozumowania zdroworozsądkowe (niemonotoniczne), bowiem prowadzą one do efektywnych działań w przeważającej większości przypadków. Oczywiście trzeba też wyposażyć takie systemy w reakcję na pojawienie się sytuacji wymagającej rewizji przekonań, gdy rzeczywistość im przeczy. Tak więc z jednej strony mamy do czynienia z teoriami normatywnymi, opisującymi normalne przypadki, a z drugiej reakcje na sytuacje wyjątkowe.

Jak się jednak mają rozważania o niemonotoniczności do eliminacji kwantyfikatorów z tematu niniejszego wykładu? Otóż okazuje się, że formalizmy modelujące wnioskowania niemonotoniczne zwykle bezpośrednio lub pośrednio wkraczają w dziedzinę logiki II-go rzędu, a więc i kwantyfikatorów II-go rzędu o czym nieco dalej. Tu podkreślmy jedynie, że w swojej istocie wnioskowania zdroworozsądkowe opierają się na heurystycznym uzupełnianiu wiedzy, co zwykle prowadzi do formalizacji II-go rzędu.

5. CZYM SĄ KWANTYFIKATORY II-GO RZĘDU I PO CO JE ELIMINOWAĆ ?

Zapewne wszyscy znamy kwantyfikatory "istnieje" i "dla każdego". Pozwalają one mówić o faktach egzystencjalnych i uniwersalnych dotyczących elementów rozważanej dziedziny. Są to tzw. kwantyfikatory I-go rzędu. Możemy przy ich pomocy powiedzieć, że "każdy dorosły człowiek ma prawo do pracy". Jednak nie możemy powiedzieć, że "każda relacja między ludźmi powinna być dobra". Kwantyfikatory wiążące relacje, funkcje, zbiory, formuły nazywane są kwantyfikatorami II-go rzędu.[8]

[8] Kwantyfikatory wiążące zbiory zbiorów to kwantyfikatory III-go rzędu, zbiory zbiorów zbiorów wiążą kwantyfikatory IV-go rzędu, itd.

Z koncepcyjnego punktu widzenia wydaje się, że przejście od I-go do II-go rzędu jest nieskomplikowane. Okazuje się jednak, że modele oparte na dedukcyjnych bazach danych z logiką, a więc i kwantyfikatorami I-go rzędu mają deterministyczną wielomianową złożoność obliczeniową, która jest uważana za złożoność, z którą radzą sobie współczesne komputery. Natomiast dla baz danych, w których występują w językach zapytań kwantyfikatory II-go rzędu złożoność ta wydaje się drastycznie rosnąć[9]. Nie jest znany żaden algorytm dla obliczenia zapytań wyrażonych z pomocą kwantyfikator ów II-go rzędu, działający w czasie mniejszym niż wykładniczy ze względu na rozmiar bazy danych, czyli wymagane jest tu 2^n kroków, gdzie n jest liczbą faktów pamiętanych w bazie danych. Załóżmy, że baza jest bardzo mała i zawiera zaledwie 100 zapisów. Do obliczenia zapytania trzeba więc $2^{100} \approx 10^{30}$ kroków. Przypuśćmy, że mamy do czynienia z komputerem wykonującym 1010 operacji na sekundę. Do obliczenia zapytania potrzebuje więc $10^{30}/10^{10} = 10^{20}$ sekund. Jeden rok ma znacznie mniej niż 10^8 sekund, zatem obliczenie zajęłoby dużo więcej niż $10^{20}/10^8 = 10^{12}$ lat, czyli dużo więcej niż 1000 miliardów lat. To sporo, biorąc pod uwagę fakt, że wiek Układu Słonecznego szacuje się na około 4.5 miliarda lat.

Jeśli więc można w danym przypadku wyeliminować kwantyfikatory II-go rzędu - warto to robić, bowiem wynikowe zapytania można obliczać w czasie sekund czy godzin nawet na dużych bazach danych. Eliminacja kwantyfikatorów I-go rzędu również zmniejsza złożoność obliczeniową, jednak nie daje tak drastycznej różnicy. Dlatego skupienie się na eliminacji kwantyfikatorów II-go rzędu jest bardzo dobrze uzasadnione.

Przyjmiemy dalej, że mamy do czynienia z kwantyfikatorami

- $\exists R A(R)$ ”istnieje relacja R, dla której spełniona jest formuła $A(R)$”
- $\forall R A(R)$ ”każda relacja R, spełnia formułę $A(R)$”.

6. JAK ELIMINOWAĆ KWANTYFIKATORY II-GO RZĘDU?

Aby dać wrażenie jak mogą wyglądać twierdzenia o eliminacji kwantyfikatorów IIgo rzędu, zacytujemy tu lemat Ackermanna z 1935 roku opublikowany w [1]. Jego istotne wzmocnienie zostało podane w pracy [9], wymaga jednak ono wprowadzenia rachunku stałopunktowego. Rachunek ten jako język zapytań do baz danych ma nadal deterministyczną wielomianową złożoność, znacznie jednak wykracza poza logikę Igo rzędu, obejmując wszystkie pytania obliczalne deterministycznie w czasie wielomianowym (przy założeniu o odpowiednim uporządkowaniu dziedziny).

[9] Wprawdzie jest to jedynie hipoteza, powszechnie się jednak w nią wierzy. Za wykazanie lub obalenie tej hipotezy czeka nagroda w wysokości miliona USD i wielkie uznanie w świecie nauki i praktyki.

Przegląd różnych podejść do eliminacji kwantyfikatorów II-go rzędu można znaleźć w artykule [8].

TEMAT 6.1 [Ackermann]

Niech R będzie symbolem relacyjnym oraz $A(x,z)$, $B(R)$ będą formułami. Załóżmy ponadto, że A nie zawiera wystąpień R. Wówczas:

• jeśli R występuje w $B(R)$ jedynie negatywnie[10], to

$\exists R \forall x[A(x,z) \rightarrow R(x)] \wedge B(R) \equiv B(R := A(x,z))$ (1)

• jeśli R występuje w $B(R)$ jedynie pozytywnie[11]

$\exists R \forall x[R(x) \rightarrow A(x,z)] \wedge B(R) \equiv B(R := A(x,z))$ (2)

gdzie $:=$ oznacza zastąpienie R przez $A(\bar{x}, \bar{z})$, przy czym x w A jest zastępowane przez odpowiednie argumenty z zastępowanego wystąpienia R.

Zwykle formuły nie są dane bezpośrednio w postaci (1) lub (2). Opracowano algorytmy sprowadzania formuł do tej postaci (por. algorytm [11] lub jego rozszerzenie[12] [4]). Niestety sam problem czy dana formuła da się sprowadzić do jednej z tych postaci jest nierozstrzygalny. Dlatego też wspomniane algorytmy rozwiązują go dla obszernych klas formuł, jednak nie dla wszystkich, w pewnych przypadkach informując o porażce[13]. Jest więc nadal pole do popisu przy dalszym rozszerzaniu tych algorytmów.

7. JAK SIĘ TO MA DO PRAKTYKI?

Jeśli mamy do czynienia z pojęciami przybliżonymi, w sposób naturalny pojawia się margines niewiedzy. Rozumowanie niemonotoniczne tak naprawdę odzwierciedla różne metody radzenia sobie z niewiedzą. Zwykle staramy się minimalizować stany wyjątkowe, odbiegające od normy. Na przykład zakładamy, że pociąg odjedzie mniej więcej o czasie. Nie bierzemy pod uwagę możliwych przyczyn zmiany tego stanu rzeczy, zakładając normalność. Wyjątkowe sytuacje, jak awaria torów, atak terrorystów, uderzenie meteora w stację kolejową, czy gwałtowna niechęć tego dnia do pracy wszystkich kolejarzy w danym rejonie nie jest brana pod uwagę, czyli minimalizujemy te niezwykłości. Podobnie gdy widzimy ptaka, o którym nie wiemy czy lata, zwykle nie odpowiadamy że fakt iż ten ptak lata przyjmuje wartość logiczną

[10] Pod nieparzystą liczbą negacji.

[11] Pod parzystą liczbą negacji.

[12] Zaimplementowane i dostępne na stronie http://www.ida.liu.se/labs/kplab/projects/dlsstar/, również ze wspomnianą metodą stałopunktową z pracy [9].

[13] Która może, lecz nie musi oznaczać niemożliwość sprowadzenia danej formuły do wymaganej postaci.

NIEZNANA, ale zakładamy że umie latać. Takie założenia pozwalają często na podjęcie właściwych działań nawet w warunkach niewiedzy. Te metody wnioskowania można modelować przy pomocy formalizmu otaczania, wprowadzonego przez Mc-Carthy'ego [7].

W formalizmie McCarthyego podstawową rolę przyjmuje minimalizacja relacji w ramach danej teorii Th, wyrażona w najprostszej postaci, jako formuła II-go rzędu, w której minimalizowana jest relacja R:

$$Th(R) \wedge \forall X[(Th(X) \wedge X \subseteq R) \rightarrow R \subseteq X] \quad (3)$$

Aby zilustrować technikę otaczania, rozważmy wspomnianą teorię dotyczącą ptaków (gdzie ab reprezentuje ”abnormalność”):

$$\forall x[(ptak(x) \wedge \neg ab(x)) \rightarrow lata(x)]$$

Chcąc minimalizować nienormalność wyrażoną przez relację ab korzystamy ze schematu (3):

$$\forall x[(ptak(x) \wedge \neg ab(x)) \rightarrow lata(x)] \wedge$$
$$\forall X \forall x[(ptak(x) \wedge \neg X(x)) \rightarrow lata(x)] \wedge X \subseteq R) \rightarrow R \subseteq X$$

Teraz można wyeliminować kwantyfikator II-go rzędu $\forall X$ i prowadzić dalej wnioskowanie.

Zastosowanie lematu Ackermanna w tym kontekście jest omówione bardziej szczegółowo w [4].

Wspomnieliśmy wcześniej, że pojęcia przybliżone są często modelowane przez warunki wystarczające i konieczne. Okazuje się, że szczególną rolę odgrywają tu najsłabsze warunki wystarczające i najsilniejsze warunki konieczne (por. [6, 5]), pozwalające na wiele ważnych form wnioskowania, w tym na abdukcję i generowanie hipotez. Jak pokazano w [5], warunki te są wyrażane jako formuły II-go rzędu.

8. PODSUMOWANIE

W wykładzie oraz w powyższej notatce naszkicowaliśmy pewne techniki rozwiązywania niebanalnych zagadnień wnioskowania w sztucznej inteligencji. Niejednokrotnie rozwiązania przyjęte w praktyce wymagają zastosowania zaawansowanych technik logicznych, zwykle głęboko ukrytych w powstałym oprogramowaniu, jednak zasadniczych dla wydajności i jakości takiego oprogramowania.

Metodyka przyjęta w rozważanych zastosowaniach polega na zaawansowanym modelowaniu rzeczywistości, a następnie rozwiązaniu problemów złożonościowych stawianych przez te modele. Zarówno problemy modelowania, jak i przełamywanie złożoności często wymaga rozwiązania niebanalnych zagadnień logicznych.

Bardziej obszernemu przedstawieniu wątków zarysowanych na wykładzie jest poświęcona przygotowana książka [3], do której odsyłam bardziej dociekliwych czytelników.

LITERATURA

1. W. Ackermann. Untersuchungen ¨uber das Eliminationsproblem der Mathematischen Logik. Mathematische Annalen, 110:390–413, 1935.
2. N. D. Belnap. A useful four-valued logic. In G. Eptein and J.M. Dunn, editors, Modern Uses of Many Valued Logic, pages 8–37, 1977.
3. P. Doherty, W. Łukaszewicz, A. Skowron, and A. Szałas. Knowledge Engineering Techniques: a Rough Set Approach, volume 202 of Studies in Fuziness and Soft Computing. Springer Verlag, 2006.
4. P. Doherty, W. Łukaszewicz, and A. Szałas. Computing circumscription revisited. Journal of Automated Reasoning, 18(3):297–336, 1997.
5. P. Doherty, W. Łukaszewicz, and A. Szałas. Computing strongest necessary and weakest sufficient conditions of first-order formulas. International Joint Conference on AI (IJCAI'2001), pages 145 – 151, 2001.
6. F. Lin. On strongest necessary and weakest sufficient conditions. In A.G. Cohn, F. Giunchiglia, and B. Selman, editors, Proc. 7th International Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning, KR2000, pages 167–175, 2000.
7. J. McCarthy. Circumscription: A form of non-monotonic reasoning. Artificial Intelligence J., 13:27–39, 1980.
8. A. Nonnengart, H. J. Ohlbach, and A. Szałas. Elimination of predicate quantifiers. In H.J. Ohlbach and U. Reyle, editors, Logic, Language and Reasoning. Essays in Honor of Dov Gabbay, Part I, pages 159–181. Kluwer, 1999.
9. A. Nonnengart and A. Szałas. A fixpoint approach to second-order quantifier elimination with applications to correspondence theory. In E. Orłowska, editor, Logic at Work: Essays Dedicated to the Memory of Helena Rasiowa, volume 24 of Studies in Fuzziness and Soft Computing, pages 307–328. Springer Physica-Verlag, 1998.
10. Z. Pawlak. Rough Sets. Theoretical Aspects of Reasoning about Data. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
11. A. Szałas. On the correspondence between modal and classical logic: An automated approach. Journal of Logic and Computation, 3:605–620, 1993.